МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Л.М. Любчик, О.Б. Ахієзер, О.А. Геляровська,
О.І. Дунаєвська, О.А. Галуза, І.В. Сердюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
«ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

(Практичний курс для студентів технічних спеціальностей
заочної та дистанційної форм навчання)

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 03.02.16 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2016

УДК 517.1
ББК 22.161
В 93

Рецензенти:
Г. Н. Жолткевич, д-р техн. наук, проф.,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

В 93 Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / Ахієзер О.Б., Геляровська О.А., Дунаєвська О.І, О.А. Галуза, Сердюк І.В.; за ред. проф. Любчик Л.М. – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 148 с.

ISBN

Посібник входить до серії «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання» і є четвертою частиною сбірника. Містить мінімально необхідну кількість теорії та велику кількість розібраних зразків за темами «Теорія функції комплексної змінної», «Операційне числення», що відповідає особливостям самостійного навчання.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 30 Бібліогр. 15

УДК 517.1
ББК 22.161

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і приладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Навчальний посібник входить до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропонований посібник містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач. Теоретична частина містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Вона ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

ГЛАВА 1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

§1. Означення комплексних чисел

Вже в давнину при розв'язанні задач, які призводять до квадратних рівнянь, спостерігалися випадки, пов'язані з добуванням квадратних коренів з від'ємних чисел. Тоді ця задача вважалася нерозв'язною. Таким чином, численні задачі, що призводять, наприклад, до наступних рівнянь:

$$x^2+4=0\,;\; x^2+x+1=0\,,$$

виявляються такими, що не мають розв'язку. Це суттєво ускладнювало теорію рівнянь.

Щоб усунути це ускладнення, було розширено поняття про число до множини комплексних чисел, яке включає в себе всі дійсні числа, і в якому операція добування кореня вже виконується.

Означення 1.1. Множиною комплексних чисел називається множина пар $(x;y)$ дійсних чисел вигляду $x+iy$, де i – елемент такий, що $i^2=-1$, і в якому:

- рівність двох будь-яких пар x_1+iy_1 і x_2+iy_2 визначається умовою

$$x_1=x_2\,;\; y_1=y_2\,; \tag{1.1}$$

- сума і добуток пар визначаються як сума і добуток, відповідно, дійсних двочленів з урахуванням того, що $i^2=-1$, а саме:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\,; \tag{1.2}$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1). \tag{1.3}$$

- операції віднімання і ділення визначаються як операції, обернені до додавання і множення.

Зауваження. Поняття «більше за...» або «меньше за...» для комплексних чисел не вводяться, тобто, питання про те, що є більшим: $5i$ або $10i+1$, вважається таким, що не має значення.

Кожний елемент такої множини називається комплексним числом і позначається $z = x + iy$. Така форма запису називається алгебраїчною формою комплексного числа.

Дамо ряд допоміжних означень.

Означення 1.2. Комплексне число вигляду $x + 0i$ будемо вважати таким, що дорівнює дійсному числу x.

Означення 1.3. Число вигляду $0 + 0i$ називають нулем (неважко показати, що його властивості збігаються з властивостями нуля в множині дійсних чисел).

Означення 1.4. Комплексне число вигляду $0 + iy$, де $y \neq 0$, називають суто уявним і записують як iy; число $0 + 1 \cdot i = i$ називається уявною одиницею.

Якщо $z = x + iy$, то x називається дійсною частиною z, а y – уявною частиною z. Позначення: $x = \operatorname{Re} z$ (Re – початкові літери латинського realis – дійсний), $y = \operatorname{Im} z$ (Im – початкові літери imaginarius – уявний).

Означення 1.5. Комплексні числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, що мають однакові дійсні частини і протилежні за знаком (але рівні за модулем) уявні частини, називаються спряженими.

Розглянемо, як, використовуючи означення комплексних чисел, встановити правила віднімання і ділення.

Віднімання. Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ – дані комплексні числа. Згідно з означенням, різниця $z_1 - z_2$ є числом $z = x + iy$, що задовольняє умову $z_1 = z_2 + z$, або

$$x_1 + iy_1 = (x_2 + x) + i(y_2 + y) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x, \\ y_1 = y_2 + y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 - x_2, \\ y = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{1.4}$$

Ділення. Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ – дані комплексні числа. Для знаходження частки $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ множать ділене і дільник на число $\overline{z}_2 = x_2 - iy_2$, спряжене дільнику:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 - (iy_2)^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.5}$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що для додавання і множення комплексних чисел виконуються основні властивості цих дій з дійсними числами (комутативне, сполучне, розподільне і т. д.). А саме:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – комутативна властивість;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – сполучна властивість;
3. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – розподільна властивість і так далі.

Приклади.

Обчислити.

1. $(1+3i)(2i-1) = 2i + 6i^2 - 1 - 3i = (-6-1) + i(2-3) = -7 - i$.

2. $\frac{3-i}{3i-1} = \frac{3-i}{-1+3i} = \frac{(3-i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-3+i-9i+3i^2}{(-1)^2-9i^2} = \frac{-3-3-8i}{1+9} =$

$= \frac{-6-8i}{10} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

§2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел та дій з ними

Дійсні числа ми зображували точками на числовій осі. Комплексне число $x+iy$ визначається парою дійсних чисел x і y, яку можна зобразити єдиним способом, точкою на площині з координатами (x, y) в декартовій прямокутній системі координат XOY.

Таким чином, комплексне число $z=x+iy$ можна розглядати як точку на площині, абсциса якої дорівнює дійсній частині x, а ордината – уявній частині y.

Якщо $y=0$, то числа $z=x$ (які збігаються з дійсними числами) зображуються точками на осі OX, тому її називають дійсною віссю; якщо $x=0$, то числа $z=iy$, суто уявні, зображуються точками на осі OY, яка називається уявною віссю. Такий спосіб геометричного зображення комплексних чисел цілком є коректним, тому що кожна точка на площині зображує одне комплексне число, і кожне комплексне число зображується єдиною точкою на площині.

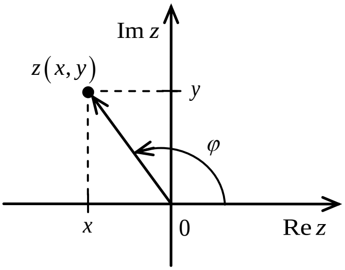

Рисунок 2.1

Комплексне число можна, наприклад, використовувати як вектор $\overrightarrow{OZ}$ (рис. 2.1), початок якого міститься на початку координат, а кінець – в точці $Z(x, y)$.

Поряд з декартовою системою координат XOY введемо полярну систему координат з полюсом O і полярною віссю OX. В полярной системі координат точка Z (рис. 2.1), яка зображує комплексне число $x+iy$, має координати (r,φ), пов'язані з декартовими координатами (x,y) цієї точки наступним чином:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.1)$$

З іншого боку, r і φ виражається через x і y так:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Користуючись системою (2.1), комплексне число $z = x+iy$ можна зобразити у наступному вигляді:

$$z = x+iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (2.3)$$

Означення 2.1. Зображення комплексних чисел $z = x+iy$ у вигляді (2.3) називається тригонометричною формою комплексного числа.

Користуючись формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, з тригонометричної форми (2.3) будемо мати:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\cdot e^{i\varphi}. \qquad (2.4)$$

Вираз (2.4) називається показниковою формою комплексного числа.

Число r, яке дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OZ}$, називається модулем комплексного числа z і позначається $r = |z|$. Кут φ, який утворює вектор $\overrightarrow{OZ}$ з додатним напрямом осі OX, називається аргументом комплексного числа і позначається символом $\arg z$. Зрозуміло, що поряд з кутом φ, таке ж саме число z (рис. 2.1) визначає й кожен з кутів вигляду $\varphi + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, аргумент є функцією багатозначною. Визначимо φ як кут

$$-\pi < \varphi \le \pi. \qquad (2.5)$$

Тоді кожному комплексному числу відповідає один кут вигляду (2.5), він називається головним значенням аргументу.

Виділення такого єдиного кута φ часто буває корисним при розв'язанні задач. Всі інші значення аргументів z будемо позначати як

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.6}$$

Зобразити комплексне число $z = x + iy$ в тригонометричній формі – це означає знайти модуль $|z|$ і аргумент φ за формулами (2.2). Іноді при знаходженні φ виникають труднощі. Головне значення $\varphi = \arg z$ визначається за формулами:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; & x < 0;\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; & x < 0;\ y \le 0; \\ \dfrac{\pi}{2}; & x = 0;\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}; & x = 0;\ y < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Враховуючи співвідношення (2.6) можна стверджувати, що два відмінних від нуля комплексних числа є рівними між собою, якщо є рівними їхні модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на число, кратне 2π:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.8}$$

***Приклад* 2.1.** Зобразимо в тригонометричній формі наступне комплексне число: $z = -3 + 3i$.

***Розв'язання*.**

Цьому комплексному числу відповідає на площині точка $A(-3;3)$ або вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 2.2).

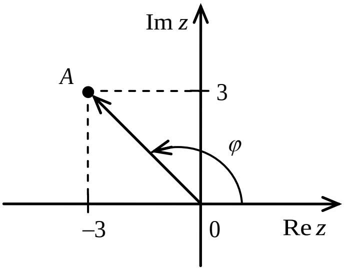

Рисунок 2.2

Маємо: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; φ – кут, який міститься у ІІ чверті $(x < 0;\ y > 0)$, отже

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-3}{3} = \pi - \operatorname{arctg}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким чином, $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

***Приклад* 2.2.** Зобразимо в тригонометричній формі наступне комплексне число: $z = -3 - 4i$.

***Розв'язання*.**

Зобразимо z на площині точкою $B(-3;-4)$ (рис. 2.3) або вектором $\overrightarrow{OB}$.

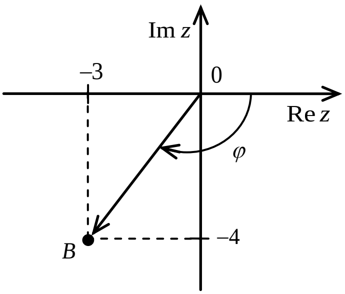

Рисунок 2.3

Маємо: $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$; φ – кут, який міститься в III чверті $(x<0;\ y<0)$, отже

$$\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{-3}\right)=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi\ .$$

Таким чином,

$$z=5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi\right)+i\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi\right)\right)=$$

$$=5\left(\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)-i\cdot\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)=$$

$$=5\left(-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)-i\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)=$$

$$=-5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

***Приклад* 2.3.** Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z, для яких

$$|z-1|=2\ . \tag{2.9}$$

***Розв'язання*.**

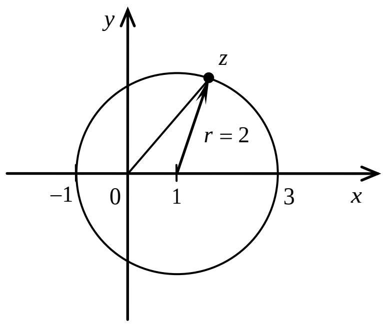

Рисунок 2.4

З означення різниці між комплексними числами z і 1 ($z = x + iy$ і $1 = 1 + 0i$, де z – довільна точка шуканої геометричної множини), маємо:

$$z - 1 = (x - 1) + iy,$$

тоді

$$|z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

і (2.9) можна записати у вигляді

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2,$$

звідки, після піднесення обох частин до квадрату, отримуємо:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2^2.$$

Таким чином, множина шуканих точок z міститься на колі з центром в точці $(1;0)$ і радіусом $r = 2$ (рис.2.4).

***Приклад* 2.4.** Знайти, де містяться точки, що зображують комплексні числа z, які задовольняють наступні дві нерівності:

$$0 \le \arg z \le \frac{\pi}{6}, \tag{2.10а}$$

$$0 < |z - 1| \le 1. \tag{2.10б}$$

***Розв'язання*.**

Для розв'язання задачі знайдемо спочатку множину точок, що задовольняють умови (2.10а) і (2.10б) окремо. А потім серед них виберемо точки, які задовольняють і (2.10а), і (2.10б). За означенням аргументу точки, які задовольняють умову (2.10а), лежати між і на променях

OA (додатний напрям осі OX) і OB (промень нахилений до додатного напряму осі OX під кутом $\frac{\pi}{6}$) (рис. 2.5).

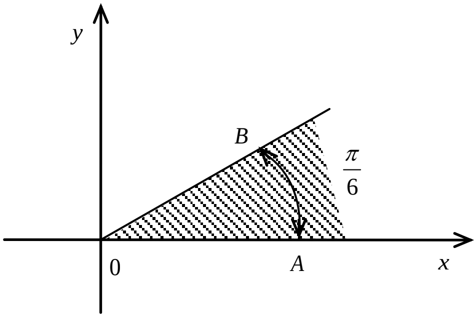

Рисунок 2.5

Точки z, які задовольняють умову (2.10б) лежать всередині круга з центром в точці $(1;0)$ і радіусом $r=1$, окрім самого центра, тобто точки $(1;0)$ (тому що при $z=1$ маємо $|z-1|=0$) (рис. 2.6).

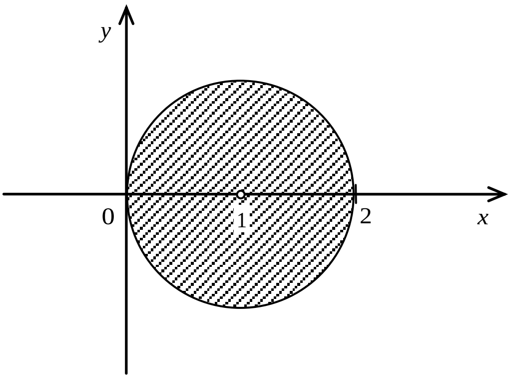

Рисунок 2.6

Одночасно умови (2.10а) і (2.10б) задовольняють точки множини, що є перетином множин точок, зображених на рисунках 2.5 і 2.6. Тоді множина комплексних чисел z, зображених на рис. 2.7, і дає розв'язок задачі.

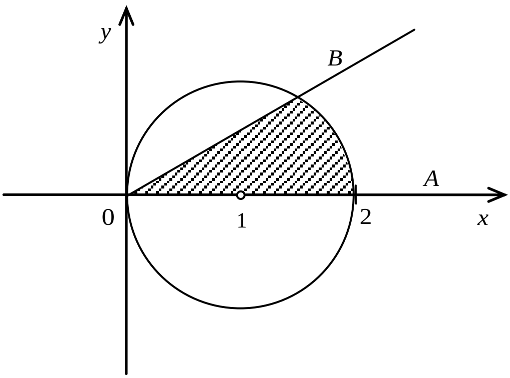

Рисунок 2.7

§3. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Якщо комплексні числа зображені в тригонометричній формі, то виконання операцій множення, ділення та добування кореня значно полегшується.

Нехай $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Користуючись означенням добутку комплексних чисел, знайдемо добуток цих чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \left[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1) \right] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right]. \qquad (3.1)$$

Якщо $z_2 \neq 0$, то для частки цих чисел отримаємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1) \right]}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right]. \qquad (3.2)$$

Як видно з (3.1) і (3.2), добуток і частка двох комплексних чисел виявилися зображеними в тригонометричній формі.

Сформулюємо отримані в формулах (3.1) і (3.2) результати.

1. Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулей цих чисел, тобто

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \qquad (3.3)$$

Одне з значень аргументу добутку двох комплексних чисел дорівнює сумі аргументів множників, тобто

$$\arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = \arg z_1 + \arg z_2 \,. \tag{3.4}$$

Ці ж висновки легко розповсюдити і на добуток якого завгодно числа комплексних чисел, отже

$$\left|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n\right| = \left|z_1\right| \cdot \left|z_2\right| \cdot \ldots \cdot \left|z_n\right| ,$$

$$\arg\left(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n\right) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n \,.$$

2. Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їхніх модулей, тобто

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|} ,\ \left(\left|z_2\right| \neq 0\right). \tag{3.5}$$

Одне зі значень аргументу частки двох комплексних чисел дорівнює різниці аргументів цих чисел, тобто

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \,. \tag{3.6}$$

Застосуємо результати (3.2), (3.3) і (3.4) для обчислення z^n, де $n \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$. Оскільки натуральний степень числа є добутком рівних множників, то

$$z^n = r^n \cdot \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = r^n \cdot \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \tag{3.7}$$

Скорочуючи на r^n, отримаємо

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi . \tag{3.8}$$

Це співвідношення відомо як формула Муавра. Формулу Муавра можна узагальнити на випадок, коли n – ціле від’ємне число. Дійсно, якщо $n = -m < 0$ ($m > 0$), то

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = \cos m\varphi - i\sin m\varphi = \cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi) =$$

$$= \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

Означення 3.1. Комплексне число ω називається коренем n-го степеню з числа z, якщо $\omega^n = z$.

Покажемо, що в області комплексних чисел операція добування кореня завжди виконується.

Теорема 3.1. Якщо $z \neq 0$, то існує n різних комплексних чисел ω_n які є коренями n-го степеню з z. При $z = 0$ існує єдине число $\omega = 0$.

Доведення. Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ – дане комплексне число. Будемо вважати $\omega = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ таким, що задовольняє умову

$$\omega^n = z. \tag{3.9}$$

Користуючись формулою Муавра (3.8), подамо умову (3.9) у вигляді

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.10}$$

Запишемо умову (2.8) рівності цих двох комплексних чисел:

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Звідси знайдемо

$$\begin{aligned} &\rho = \sqrt[n]{r}, \\ &\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким чином,

$$|\omega| = \sqrt[n]{r} \, ,$$

$$\arg \omega = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \, , \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

Тоді шукані значення:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \right) \right). \qquad (3.13)$$

Можна показати, що серед нескінченної множини значень ω_k є n різних чисел. А саме, це ті числа, які отримуються з (3.13) при

$$k = 0; 1; 2; ...; n-1 \, . \qquad (3.14)$$

Таким чином, теорему доведено, і дано спосіб для обчислення кореня будь-якого степеню з будь-якого комплексного числа. Для цього потрібно зобразити це число в тригонометричній формі і скористатися формулою (3.13) з урахуванням (3.14).

Геометричний результат добування кореня n-ого степеню з комплексного числа зображується точками ω_k комплексної площини, розташованими на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$ на кутовій відстані $\frac{2\pi}{n}$ одне від одного, тобто у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$. Перша точка має полярні координати $\left(\sqrt[n]{r}, \frac{\varphi}{n} \right)$, решта точок міститься на колі послідовно через кут $\frac{2\pi}{n}$.

***Приклад* 3.1.** Знайти комплексні розв’язання рівняння:

$$z^3 - 8i = 0 \, . \qquad (3.15)$$

Розв'язання.

Перепишемо рівняння (3.15) у вигляді

$$z^3 = 8i\ .$$

Звідси видно, що задача зводиться до знаходження кубічного кореня з $8i$. Згідно з теоремою 3.1, існують три різні значення кореня:

$$\omega_k = \sqrt[3]{8i}\ .$$

Зобразимо число $8i$ в тригонометричній формі:

$$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Тоді шуканими значеннями кубічного кореня будуть:

$$\omega_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right);\ k = 0,1,2\ .$$

Звідси:

$$\omega_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i\ ;$$

$$\omega_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i\ ;$$

$$\omega_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i\ .$$

Таким чином, отримаємо розв'язки рівняння:

$$\omega_0 = \sqrt{3} + i\,;\ \omega_1 = -\sqrt{3} + i\,;\ \omega_2 = -2i\,,$$

які зображені на рисунку 3.1.

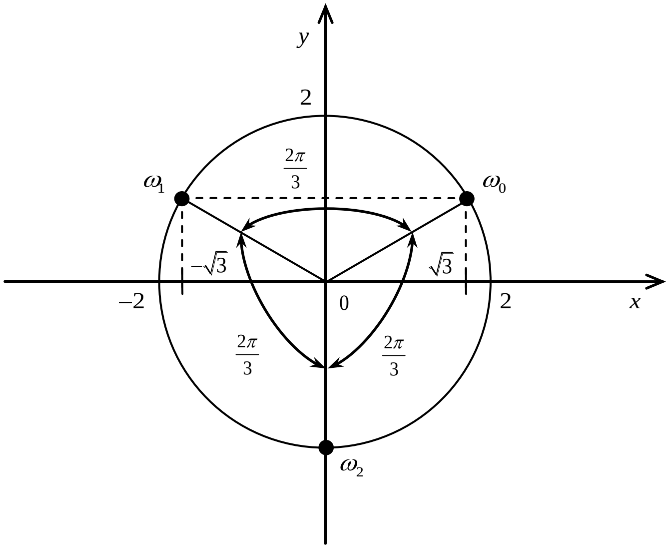

Рисунок 3.1

***Приклад* 3.2.** Обчислити $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

***Розв'язання*.**

Зобразимо число, що стоїть в круглих дужках, в тригонометричній формі, користуючись формулою (3.2):

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Тоді отримаємо:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Користуючись формулою (3.7), знайдемо:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\frac{7\pi\cdot 20}{12}+i\sin\frac{7\pi\cdot 20}{12}\right)=$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{3}+i\sin\frac{35\pi}{3}\right)=2^{10}\left(\cos\left(12\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(12\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=2^{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^{10}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=2^{9}\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

§4. Границя послідовності комплексних чисел

Для побудови теорії функції комплексної змінної велике значення має перенесення основних ідей математичного аналізу до області комплексних чисел. Одним з фундаментальних понять математичного аналізу є поняття границі і, зокрема, поняття збіжної числової послідовності. Аналогічну роль відіграють відповідні поняття також в області комплексних чисел.

Означення 4.1. Послідовністю комплексних чисел називається пронумерована нескінченна множина комплексних чисел. Іншими словами, якщо кожному номеру $n \in \mathbb{N}$ поставити у відповідність комплексне число z_n, то буде визначена послідовність комплексних чисел, яка позначається $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 4.2. Число z називається границею послідовності $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо для будь-якого додатного числа ε можна указати такий номер $N(\varepsilon)$**,** що залежить від ε, починаючи з якого всі елементи z_n цієї послідовності задовольняють нерівність $|z - z_n| < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 \forall n \geq N(\varepsilon) : |z - z_n| < \varepsilon . \tag{4.1}$$

Послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, що має границю z, називається збіжною до числа z, що записується у вигляді:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z . \tag{4.2}$$

Означення 4.3. Множина точок z комплексної площини, які лежать всередині круга радіуса ε з центром у точці z_0 $\left(|z - z_0| < \varepsilon\right)$, називається ε-околом точки z_0.

З цього означення випливає, що точка z є границею збіжної послідовності $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо в будь-якому ε-околі точки z лежать всі елементи цієї послідовності, починаючи з номера, який залежить від ε.

Оскільки кожне комплексне число $z_n = a_n + ib_n$ характеризується парою дійсних чисел a_n і b_n, то послідовності комплексних чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ відповідають дві послідовності дійсних чисел: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, складені відповідно з дійсних і уявних частин елементів z_n послідовності $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Має місце наступне твердження.

Теорема 4.1. Необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжність послідовностей дійсних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\left(z_n = a_n + ib_n;\ z_n \underset{n\to\infty}{\to} z = a + ib \Leftrightarrow \begin{matrix} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\to} a, \\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\to} b. \end{matrix} \right)$$

Означення 4.4. Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається обмеженою, якщо існує таке додатне число M, що для всіх елементів z_n цієї послідовності має місце нерівність $|z_n| < M$.

Основну властивість обмеженої послідовності характеризує наступна теорема.

Теорема 4.2. З будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну послідовність.

Враховуючи тригонометричне зображення (2.3) комплексного числа, сформулюємо аналогічне теоремі 4.1 твердження.

Теорема 4.3. Нехай дано послідовність комплексних чисел $\{z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, зображених в тригонометричній формі. Така послідовність збігається до числа $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ тоді й тільки тоді, коли $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} r_0$, а $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_0$.

Для збіжності послідовності до нуля достатньо вимагати, щоб $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Послідовність $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого додатного ε існує такий номер N, який залежить від ε, що для всіх номерів n, починаючи з цього номера буде виконуватися умова $\left|z_n\right| > \varepsilon$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0\ \forall n \geq N(\varepsilon) : \left|z_n\right| > \varepsilon .$$

Те, що послідовність $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ нескінченно велика, позначається так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty . \tag{4.3}$$

Зовнішність кола будь-якого радіуса з центром на початку координат на комплексній площині називається околом нескінченності.

§5. Нескінченно віддалена точка

Стереографічна проекція точок комплексної площини на сферу дає геометричне тлумачення нескінченно великої послідовності.

Розглянемо сферу скінченого радіуса R, яка дотикається південним полюсом комплексної площини в точці $z = 0$, тобто діаметр сфери OA є перпендикулярним комплексній площині $\mathbb{C}$. З'єднаємо променем північний полюс з точкою $z_n \in \mathbb{C}$ (рис. 5.1).

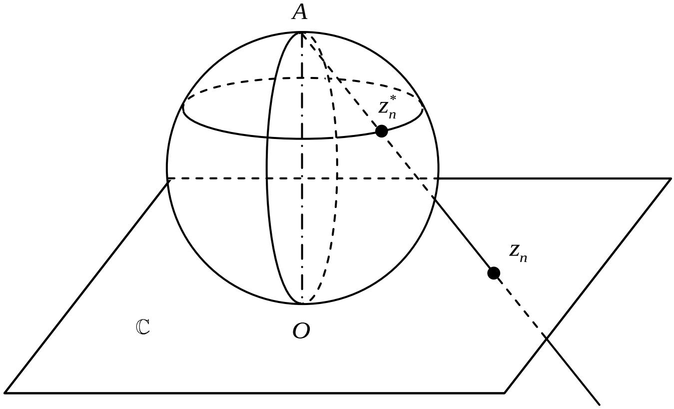

Рисунок 5.1

Тоді точка z_n^* перетину променя з поверхнею сфери буде стереографічною проекцією z_n на сферу. Таким чином, можна встановити взаємно однозначну відповідність між точками комплексної площини і точками поверхні сфери з виколотим північним полюсом (точкою A). Якщо послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ наближається до нескінченності $\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty\right)$, то точки на сфері, що зображують цю послідовність, необмежено наближаються до точки A. Цю точку A і вважають за зображення нескінченності, а відповідну їй єдину точку площини називають нескінченно віддаленою точкою.

О з н а ч е н н я 5.1. Комплексна площина з нескінченно віддаленою точкою називається повною комплексною площиною.

Під околом точки A на сфері розуміють частину поверхні сфери, обмеженої будь-яким колом, яке лежить в площині, перпендикулярній OA. Вона і є стереографічною проекцією окола нескінченно віддаленої точки площини, тобто зовнішності будь-якого кола з центром на початку координат. Зауважимо, що $z = \infty$ і $z = 0$ – це точки, що не мають визначеного аргументу.

Розглянемо послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, збіжну до нескінченно віддаленої точки. Складемо з її елементів послідовність $\left\{\xi_n = \dfrac{1}{z_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$. Вірно й зворотне: тобто, якщо з елементів послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, збіжної до нуля, скласти послідовність $\left\{z_n = \dfrac{1}{\xi_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, то остання буде збігатися до нескінченно віддаленої точки.

§6. Множина в комплексній площині

Означення 6.1. Точка z називається внутрішньою точкою множини E, якщо існує ε-окіл точки z, всі точки якого належать множині E.

Наприклад, точка z множини $E = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 2 \}$ є внутрішньою точкою, якщо $|z| < 2$, а точки $z = 2$; $z = 2 + i$ не є внутрішніми точками цієї множини.

Означення 6.2. Множина E називається областю, якщо виконуються наступні умови: 1) кожна точка множини E – внутрішня точка цієї множини; 2) будь-які дві точки множини E можна з'єднати лінією, всі точки якої належать E.

Умова 2 у визначенні 6.2 називається умовою зв'язності області. Тобто, множина точок $|z+i| < 2$ утворює область, а множина точок $|z+i| \le 2$ не є областю, тому що не всі точки множини є внутрішніми.

Множина точок $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1; \ |z-3| < 1 \}$ також не є областю, тому що не виконується умова зв'язності множини (рис. 6.1).

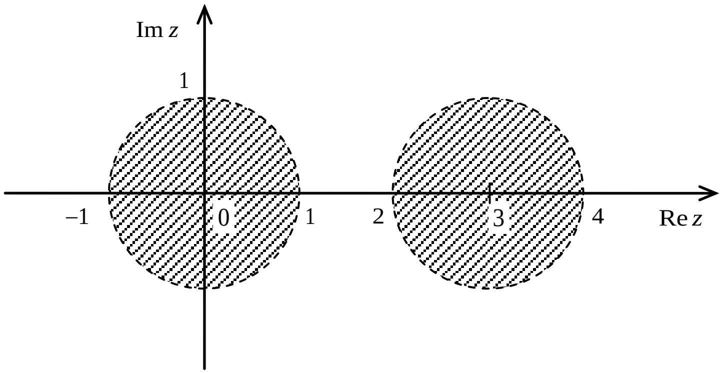

Рисунок 6.1

Означення 6.3. Точка z називається зовнішньою точкою множини E, якщо існує такий ε-окіл z, всі точки якого не належать множині E.

Означення 6.4. Точка z називається межовою точкою множини E, якщо в будь-якому її ε-околі містяться як точки, належні множині E, так і точки, не належні множині E.

Наприклад, точка $z = 2$ є межовою точкою множини $|z| < 2$.

Означення 6.5. Сукупність всіх межових точок утворює межу множини і позначається ∂E.

Найпростішим прикладом межі області, очевидно, є крива; однак межу області може складати дискретна множина точок. Наприклад, множина точок $|z| \neq 0$ утворює на комплексній площині область, межею якої є точка $z = 0$.

Означення 6.6. Множина, яка утворюється приєднанням до області всіх її межових точок, називається замкненою областю.

Замкнену область звичайно позначають, ставлячи рису над символом області, наприклад: $\bar{E}$; $\bar{D}$.

Єдиним прикладом області, яка не має межіі, є розширена комплексна площина.

Будь-яка неперервна замкнена крива без точок самоперетину (Жорданова крива) ділить площину на дві області: одна містить нескінченно віддалену точку (зовнішня), інша не містить (внутрішння). Сама крива є межею обох областей.

Означення 6.7. Область називається однозв’язною, якщо внутрішність будь-якої Жорданової кривої, належної області, також належить області.

Прикладом однозв’язної області є внутрішня частина круга – її межею служить коло. Прикладом багатозв’вязної (n – зв’язної) області може служити область, межа якої складається з n Жорданових кривих: $l_1; l_2; ...; l_n$ (рис. 6.2).

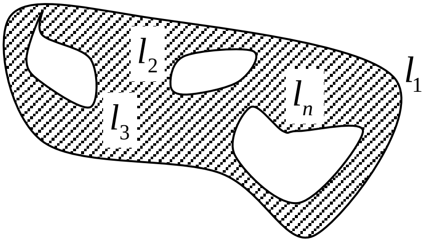

Рисунок 6.2

Означення 6.8. Якщо область E целиком міститься всередині деякого круга скінченого радіуса, то вона називається обмеженою. В протилежному випадку – необмеженою.

§7. Функції комплексної змінної

Будемо вважати, що на множині E комплексної площини задано функцію комплексної змінної, якщо задано закон, який ставить у відповідність кожній точці множини E деяке комплексне число або сукупність комплексних чисел. Множину E будемо називати множиною значень незалежної змінної. Якщо кожній точці $z \in E$ ставиться у відповідність точка ω, то функція називається однозначною, якщо ставиться у відповідність сукупність точок ω, тоді функція називається багатозначною. Символічно вказану відповідність будемо записувати у вигляді

$$\omega = f(z). \tag{7.1}$$

Множина комплексних чисел ω, відповідних усім $z \in E$, називається множиною значень функції $f(z)$.

Оскільки кожне комплексне число характеризується парою дійсних чисел, то задання комплексної функції $\omega = u + iv$ комплексної змінної $z = x + iy$ є еквівалентним заданню двох функцій дійсних змінних, що може бути записано у вигляді

$$\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{7.2}$$

Таким чином, функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ визначені в деякій області площини дійсних змінних x і y, відповідній до області E комплексної площини z. Функція $u(x, y)$ називається дійсною частиною, а функція $v(x, y)$ – уявною частиною функції $\omega = f(z)$.

Геометрична интерпретація поняття функції (7.1) комплексної змінної заключається в тому, що рівністю $\omega = f(z)$ встановлюється закон відповідності між точками z області E комплексної площини і точками ω області G комплексної площини. Очевидно, встановлюється і зворотна відповідність – кожній точці $\omega \in G$ ставиться у відповідність одна або декілька точок z області E. Це означає, що в області G задано (однозначну або багатозначну) функцію комплексної змінної ω:

$$z=\varphi(\omega). \tag{7.3}$$

Функція (7.3) називається оберненою для функції (7.1). Область задання G функції $\varphi(\omega)$ є областю значень функції $f(z)$.

Означення 7.1. Функція $f(z)$ називається однолистою функцією в області E**,** якщо в різних точках z цієї області вона приймає різні значення.

§8. Основні елементарні функції комплексної змінної

8.1. Степенева функція $\omega = z^n$.

Степенева функція $\omega = z^n$ при $n \in \mathbb{Z}$ є однозначною функцією, тому що ставить у відповідність будь-якому комплексному числу $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ число

$$\omega = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Функція $\omega = \sqrt[n]{z}$ кожному значенню z ставить у відповідність n різних чисел

$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\varphi + 2\pi k)}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right);$$

$$k = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

тобто, визначає n різних однозначних функцій.

8.2. Показникова функція $\omega = e^z$.

Оскільки $z = x + iy$, то e^z визначається співвідношенням

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^x \cdot \cos y + ie^x \cdot \sin y,$$

тобто

$$\operatorname{Re} e^z = u(x; y) = e^x \cos y,$$

$$\operatorname{Im} e^z = v(x; y) = e^x \sin y.$$

Показникова функція володіє наступними властивостями.

1°. Функція є однозначною.

2°. Для дійсних значень $z = x$ означення збігається з означенням показникової функції для функцій дійсної змінної.

3°. Зберігається основна властивість показникової функції:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

4°. Показникова функція не обертається в нуль в жодній точці комплексної площини.

5°. В комплексній площині показникова функція є периодичною з суто уявним періодом $T=2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

8.3. Логарифмічна функція $\omega=\mathrm{Ln}\,z\quad\left(z\neq 0\right)$.

Логарифмічна функція $\omega=\mathrm{Ln}\,z$ визначається як обернена до показникової функції:

$$\omega=\mathrm{Lnz}=\ln\left|z\right|+i\mathrm{Argz}=\ln\left|z\right|+i\left(\varphi+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

1°. Логарифмічна функція $\mathrm{Ln}\,z$ є багатозначною, тому що для будь-якого $z\neq 0$ існує нескінченна множина значень $\mathrm{Ln}\,z$, у яких дійсна частина $u=\ln\left|z\right|$, а уявні частини відрізняються на доданок $2\pi k$.

2°. При $k=0$ виділяють однозначну функцію $\ln z$:

$$\ln z=\ln\left|z\right|+i\varphi.$$

Функцію $\ln z$ називають головним значенням функції $\mathrm{Ln}\,z$.

3°. Для додатних дійсних чисел головне значення логарифма збігається зі значенням логарифмічної функції дійсної змінної і володіє усіми її властивостями.

4°. Зберігаються основні властивості логарифмічной функції:

$$\mathrm{Ln}\left(z_1\cdot z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2;\ \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2;\ \mathrm{Ln}\,z^n=n\cdot\mathrm{Ln}\,z.$$

8.4. Тригонометричні функції.

Функції e^z; $\cos z$; $\sin z$ зв'язані формулами Ейлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \,; \; e^{-iz} = \cos z - i \sin z \,,$$

звідки

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \,; \; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \,.$$

Функції $\omega = \sin z$ і $\omega = \cos z$ мають тільки дійсні нулі:

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi k \,; \; k \in \mathbb{Z} \,,$$

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k \,; \; k \in \mathbb{Z} \,.$$

Функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ визначаються рівностями:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \,; \; k \in \mathbb{Z} \,,$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq \pi k \,; \; k \in \mathbb{Z} \,.$$

Для будь-якого дійсного $z = x$ функції збігаються з тригонометричними функціями $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ дійсного аргументу x.

Функції $\omega = \sin z$ і $\omega = \cos z$ – періодичні з дійсним періодом 2π, а $\omega = \operatorname{tg} z$ і $\omega = \operatorname{ctg} z$ – з періодом π. Зберігаються властивості парності і непарності:

$$\cos(-z) = \cos z \,, \; \sin(-z) = -\sin z \,,$$

$$\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z \,, \; \operatorname{ctg}(-z) = -\operatorname{ctg} z \,.$$

Функції комплексної змінної $\sin z$ і $\cos z$ (на відміну від функції дійсної змінної $\sin z$ і $\cos z$) можуть приймати скільки завгодно більші за модулем значення (тобто больші за одиницю).

8.5. Гіперболічні функції.

Гіперболічні функції в комплексній області визначаються рівностями:

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2};\ \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}};\ \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}.$$

Для гіперболічних функцій виконуються всі співвідношення, які зв'язують гіперболічні функції дійсного аргументу. В комплексній площині $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ є періодичними функціями з суто уявним періодом $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ і $\operatorname{cth} z$ – з періодом πi.

Для гіперболічних і тригонометричних функцій мають місце наступні тотожності:

$$\sin z=-i\cdot\operatorname{sh} iz;\ \operatorname{sh} z=-i\sin iz;\qquad \operatorname{tg} z=-i\cdot\operatorname{th} iz;\ \operatorname{th} z=-\operatorname{tg} iz;$$

$$\cos z=\operatorname{ch} iz;\ \operatorname{ch} z=\cos iz;\qquad \operatorname{ctg} z=i\cdot\operatorname{cth} iz;\ \operatorname{cth} z=i\cdot\operatorname{ctg} iz.$$

8.6. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції.

Обернені тригонометричні і гіперболічні функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$ визначаються як функції, обернені відповідно до функцій $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\operatorname{tg}\omega$, $\operatorname{ctg}\omega$, $\operatorname{sh}\omega$, $\operatorname{ch}\omega$, $\operatorname{th}\omega$, $\operatorname{cth}\omega$. Всі ці функції є багатозначними і виражаються через логарифмічні функції:

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\cdot\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^{2}}\right);\ \operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}+1}\right);$$

$$\operatorname{Arccos} z=-i\cdot\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{z^{2}-1}\right);\ \operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right);$$

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\cdot\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};\ \operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z},\ z\neq 1;$$

$$\operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\cdot\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i};\ \operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1},\ z\neq 1.$$

8.7. Загальна степенева функція $\omega = z^a$.

Загальна степенева функція $\omega = z^a$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число, визначається

$$z^a = e^{a\cdot \mathrm{Ln}\, z},\ z \neq 0 .$$

Функція багатозначна, а її головним значенням буде

$$z^a = e^{a\cdot \ln z} .$$

8.8. Загальна показникова функція $\omega = a^z$ $(a \neq 0)$.

Загальна показникова функція $\omega = a^z$ $(a \neq 0)$, визначається рівністю

$$a^z = e^{z\cdot \mathrm{Ln}\, a} .$$

Функція багатозначна, її головним значенням буде

$$a^z = e^{z\cdot \ln a} .$$

***Приклад* 8.1.** Зобразити комплексне число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3} - i\right)$.

***Розв'язання*.**

За означенням: $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\cdot(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$.

$$z = \sqrt{3} - i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 ;$$

$$\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} .$$

Отже,

$$\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right).$$

Всі значення $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$ зображуються точками, розташованими на прямій $x=\ln 2$ через проміжки довжиною 2π. Головному значенню (при $k=0$) відповідає точка з координатами $(0,7;-0,52)$, $\left(\ln 2 \approx 0,7;\ -\dfrac{\pi}{6} \approx -0,52\right)$.

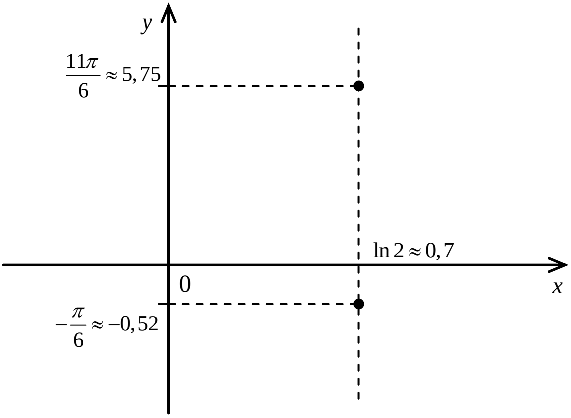

Рисунок 8.1

***Приклад* 8.2.** Обчислити $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2i}$.

***Розв'язання*.**

За означенням: $a^z = e^{z\cdot \operatorname{Ln} a}$. Маємо: $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2i} = e^{2i\cdot\operatorname{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right)}$.

Обчислимо:

$$\operatorname{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right) = \ln\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} + i\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1}+2\pi k\right) =$$

$$= \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Остаточно маємо:

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2i}=e^{2i\cdot\left(\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}=e^{2i\cdot\ln 2-\left(-\frac{2\pi}{3}+4\pi k\right)}=e^{\frac{2\pi}{3}-4\pi k}\cdot e^{2i\cdot\ln 2}=$$

$$=e^{\frac{2\pi}{3}-4\pi k}\left(\cos\left(2\ln 2\right)+i\cdot\sin\left(2\ln 2\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Головне значення маємо при $k=0$, тобто

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^{2i}=e^{\frac{2\pi}{3}}\left(\cos\ln 4+i\cdot\sin\ln 4\right).$$

***Приклад* 8.3.** Зобразити в алгебраїчній формі $\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

***Розв'язання*.**

Скористуємося формулою:

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\cdot\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\text{, де } z=\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\text{, тоді}$$

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1+i\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}}{1-i\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}}=\frac{3+i\left(-2\sqrt{3}+3i\right)}{3-i\left(-2\sqrt{3}+3i\right)}=\frac{3-2\sqrt{3}i-3}{3+2\sqrt{3}i+3}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}i}{6+2\sqrt{3}i}=\frac{-2\sqrt{3}i\left(6-2\sqrt{3}i\right)}{6^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-2\sqrt{3}i\left(6-2\sqrt{3}i\right)}{36+12}=\frac{-12\sqrt{3}i-12}{48}=$$

$$=-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\ .$$

$$\left|-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right|=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{4}{16}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}/4}{-1/4}=-\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{-2\pi}{3}\ .$$

$$\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}=\ln\frac{1}{2}+i\cdot\left(\frac{-2\pi}{3}+2\pi k\right)=-\ln 2+i\left(2\pi k-\frac{2\pi}{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}\ ;$$

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)=-\frac{i}{2}\cdot\left(-\ln 2+i\cdot\left(2\pi k-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{i\cdot\ln 2}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(2\pi k-\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\pi k-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\ln\sqrt{2}\ .$$

§9. Границя і неперервність функції комплексної змінної

Нехай функція комплексної змінної $\omega = f(z)$ визначена в області E, яка містить точку z_0.

Означення 9.1. Число ω_0 називається границею функції $f(z)$ в точці z_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок $z \in E$, які задовольняють умову $0 < |z - z_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(z) - \omega_0| < \varepsilon$.

Границя записується у вигляді: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.

З означення границі функції комплексної змінної випливає, що z може наближатися до z_0 довільним способом, отже, фукція при будь-якому способі наближення до ω_0 повинна приймати це значення.

Оскільки $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, а

$$\omega_0 = f(z_0) = u(x_0, y_0) + i \cdot v(x_0, y_0),$$

то з $\omega_0 = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ випливає, що

$$\lim_{z \to z_0} u(x, y) = u(x_0, y_0); \ \lim_{z \to z_0} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Звідси випливає, що всі властивості границь для функцій двох дійсних змінних є справедливими й для функцій комплексної змінної.

Означення 9.2. Функція $\omega = f(z)$ називається неперервною в точці $z = z_0$, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ і її значення збігається з $f(z_0)$, тобто:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad (9.1)$$

Також, як і в дійсному аналізі, позначимо $\Delta z = z - z_0$ і назвемо цю величину приростом аргументу. Тоді $\Delta\omega = f(z) - f(z_0)$ назвемо приростом функції. Умова неперервності функції в цьому випадку може бути записана в наступному вигляді:

$$\lim_{z\to z_0}\Delta\omega = \lim_{\Delta z\to 0}\Delta\omega = 0 . \qquad (9.2)$$

Аналогічно з функцією дійсного аргументу, нескінченно малою можна назвати величину, яка має своєю границею нуль. Отже, неперервність функції в точці є, якщо нескінченно малому прирісту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Означення 9.3. Функція $\omega = f(z)$, неперервна в кожній точці області E, називається неперервною в цій області.

Всі теореми дійсного аналіза про неперервні функції є справедливими й в комплексной області. Сформулуємо їх.

Теорема 9.1. Сума і добуток двох функцій комплексної змінної $f_1(z)$ і $f_2(z)$, неперервних в області E, також є неперервними функціями в цій області; функція $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ неперервна в тих точках області E, де $f_2(z) \neq 0$.

Теорема 9.2. Функція $f(z)$, неперервна в замкненій області E, є обмеженою в цій області, тобто існує така константа $M \neq \infty$, що для всіх $z \in \bar{E} : \left| f(z) \right| \leq M$.

Теорема 9.3. Функція $f(z)$, неперервна в замкненій області $\bar{E}$, приймає в ній свої максимальне і мінімальне за модулем значення.

§10. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана

Нехай в області E комплексної площини z задано функцію $f(z)$.

Означення 10.1. Якщо для точки $z_0 \in E$ існує (при $\Delta z \to 0$) границя відношення:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}, \tag{10.1}$$

то ця границя називається похідною функції $f(z)$ по комплексній змінній z в точці z_0 і позначається $f'(z_0)$, тобто

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{10.2}$$

Функція в цьому випадку називається диференційовною в точці z_0.

Якщо існує границя (10.2), то вона не залежить від способа наближення $\Delta z \to 0$. Вимога диференційовності функції комплексної зміної в точці z_0 накладає дуже важливі умови на поведінку дійсної й уявної частин цієї функції в околі точки (x_0, y_0).

Теорема 10.1. Якщо функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ диференційовна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точці (x_0, y_0) існують частинні похідні функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ по змінних x і y, причому мають місце відношення:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}. \tag{10.3}$$

Дані відношення носять найменування умов Коші-Рімана.

Справедливе й зворотне твердження.

Теорема 10.2. Якщо в точці (x_0, y_0) функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні, а їхні частинні похідні зв'язані відношеннями (10.3), то функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є диференційовною функцією комплексної змінної z в точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Означення 10.2. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в усіх точках деякої області E, а її похідна неперервна в цій області, то функція $f(z)$ називається аналітичною функцією в області E.

Таким чином, з теорем 10.1 і 10.2 випливає, що необхідною і достатньою умовою аналітичності функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в області E є існування в цій області неперервних частинних похідних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$, зв'язанних відношеннями Коші-Рімана (10.3).

Для комплексного числа в тригонометричній формі відношення (10.3) приймають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}; \ |z| = \rho. \tag{10.4}$$

При виконуванні умов Коші-Рімана похідна функції $f(z)$ запишеться відповідно:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10.5}$$

Для комплексного числа в тригонометричній формі:

$$f'(z) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{10.6}$$

Точки, в яких функція $f(z)$ не є аналітичною (зокрема точки, в яких $f(z)$ не визначена), називаються особливими точками.

***Приклад* 10.1.** З’ясувати, чи є функція аналітичною $f(z)=ze^{\bar{z}}$ **.**

***Розв’язання*.**
Знайдемо дійсну і уявну частини функції:

$$z=x+iy;\ \bar{z}=x-iy;$$

$$e^{\bar{z}}=e^{x-iy}=e^{x}\cdot e^{-iy}=e^{x}\left(\cos(-y)+i\sin(-y)\right)=e^{x}\left(\cos y-i\sin y\right);$$

$$f(z)=(x+iy)\cdot e^{x}\cdot(\cos y-i\sin y)=\left(xe^{x}\cos y+ye^{x}\sin y\right)+$$

$$+i\left(ye^{x}\cos y-xe^{x}\sin y\right).$$

Функції:
$$u(x,y)=e^{x}\left(x\cos y+y\sin y\right),$$
$$v(x,y)=e^{x}\left(y\cos y-x\sin y\right)\ -$$

є диференційовними функціями змінних x і y .

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\left(x\cos y+y\sin y\right)+e^{x}\cos y=e^{x}\left(x\cos y+y\sin y+\cos y\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x}\left(-x\sin y+\sin y+y\cos y\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\left(y\cos y-x\sin\mathrm{y}\right)-e^{x}\sin y=e^{x}\left(y\cos y-x\sin y-\sin y\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\left(\cos y-y\sin y-x\cos y\right).$$

Розглянемо умови Коші-Рімана (10.3) (Запишемо їх у вигляді системи рівнянь):

$$\begin{cases} e^{x}\left(x\cos y+y\sin y+\cos y\right)=e^{x}\left(\cos y-y\sin y-x\cos y\right), \\ e^{x}\left(-x\sin y+\sin y+y\cos y\right)=-e^{x}\left(y\cos y-x\sin y-\sin y\right); \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\cos y+y\sin y+\cos y=\cos y-y\sin y-x\cos y, \\ -x\sin y+\sin y+y\cos y=-y\cos y+x\sin y+\sin y; \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2x\cos y+2y\sin y=0, \\ 2x\sin y-2y\cos y=0; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\cos y+y\sin y=0, \\ x\sin y-y\cos y=0. \end{cases}$$

Система має розв’язком $x = y = 0$. Таким чином, умови Коші-Рімана виконуються тільки в точці $(0;0)$. Отже, функція $f(z) = ze^{\bar{z}}$ диференційовна тільки в точці $(0;0)$, але вона не є аналітичною в цій точці, тому що не є диференційовною в околі даної точки.

***Приклад* 10.2.** З’ясувати, чи є функція аналітичною

$$f(z) = (z - i)\cos z\text{.}$$

***Розв’язання*.**

$z = x + iy$;

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y} + e^{-ix}\cdot e^{y}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-y}}{2}(\cos x + i\sin x) + \frac{e^{y}}{2}(\cos x - i\sin x) = \cos x\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} -$$

$$-i\sin x\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \cos x\cdot\operatorname{ch} y - i\cdot\sin x\cdot\operatorname{sh} y\ .$$

$$f(z) = (x + iy - i)(\cos x\cdot\operatorname{ch} y - i\sin x\cdot\operatorname{sh} y) =$$

$$= \left[x\cos x\cdot\operatorname{ch} y + (y-1)\sin x\cdot\operatorname{sh} y\right] + i\left[(y-1)\cos x\cdot\operatorname{ch} y - x\sin x\cdot\operatorname{sh} y\right].$$

Таким чином, дійсна й уявна частини досліджуваної функції:

$$\begin{cases} u(x,y) = x\cos x\cdot\operatorname{ch} y + (y-1)\sin x\cdot\operatorname{sh} y, \\ v(x,y) = (y-1)\cos x\cdot\operatorname{ch} y - x\sin x\cdot\operatorname{sh} y. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні отриманих функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cdot\operatorname{ch} y - x\sin x\cdot\operatorname{ch} y + (y-1)\cos x\cdot\operatorname{sh} y\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos x\cdot\operatorname{sh} y + \sin x\cdot\operatorname{sh} y + (y-1)\sin x\cdot\operatorname{ch} y\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(y-1)\sin x\cdot\operatorname{ch} y - \sin x\cdot\operatorname{sh} y - x\cos x\cdot\operatorname{sh} y\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cdot\operatorname{ch}y+(y-1)\cos x\cdot\operatorname{sh}y-x\sin x\cdot\operatorname{ch}y\,.$$

Розглянемо умови Коші-Рімана (10.3):

$$\begin{cases}\cos x\cdot\operatorname{ch}y-x\sin x\cdot\operatorname{ch}y+(y-1)\cos x\cdot\operatorname{sh}y=\cos x\cdot\operatorname{sh}y+(y-1)\cos x\cdot\operatorname{sh}y-x\sin x\cdot\operatorname{ch}y,\\ x\cos x\cdot\operatorname{sh}y+\sin x\cdot\operatorname{sh}y+(y-1)\sin x\cdot\operatorname{ch}y=(y-1)\sin x\cdot\operatorname{ch}y+\sin x\cdot\operatorname{sh}y+x\cos x\cdot\operatorname{sh}y.\end{cases}$$

Отже, умови Коші-Рімана виконуються в усій комплексній площині, тому функція $f(z)$ є аналітичною в усій комплексній площині. Обчислимо похідну функції $f(z)$ згідно з формулами (10.5):

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\cos x\cdot\operatorname{ch}y-x\sin x\cdot\operatorname{ch}y+(y-1)\cos x\cdot\operatorname{sh}y-$$
$$-i(y-1)\sin x\cdot\operatorname{ch}y-i\sin x\cdot\operatorname{sh}y-ix\cos x\cdot\operatorname{sh}y=$$
$$=(\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\sin x\cdot\operatorname{sh}y)-x(\sin x\cdot\operatorname{ch}y+i\cos x\cdot\operatorname{sh}y)+$$
$$+(y-1)(\cos x\cdot\operatorname{sh}y-i\sin x\cdot\operatorname{ch}y)=(\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\sin x\cdot\operatorname{sh}y)+$$
$$+(y-1)(\cos x\cdot\operatorname{sh}y-i\sin x\cdot\operatorname{ch}y)-ix(\cos x\cdot\operatorname{sh}y-i\sin x\cdot\operatorname{ch}y)=$$
$$=(\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\sin x\cdot\operatorname{sh}y)-i(x+i(y-1))(\cos x\cdot\operatorname{sh}y-i\sin x\cdot\operatorname{ch}y)=$$
$$=\left\|\begin{matrix}\cos z=\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\sin x\cdot\operatorname{sh}y\\ \sin z=\sin x\cdot\operatorname{ch}y+i\cos x\cdot\operatorname{sh}y\end{matrix}\right\|=\cos z-(z-i)\sin z\,.$$

З а у в а ж е н н я. Похідні аналітичних функцій $f(z)$ обчислюються з допомогою тих самих правил і таблиці похідних, що й похідні функцій однієї дійсної змінної.

§11. Властивості аналітичних функцій

Означення похідної (10.2) дозволяє перенести на аналітичні функції комплексної змінної низку властивостей диференційовних функцій дійсною змінної.

1°. Якщо $f_1(z)$ і $f_2(z)$ аналітичні функції в області E, то $f_1(z) \pm f_2(z)$ і $f_1(z) \cdot f_2(z)$ також є аналітичними функціями в області E, а функція $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ є аналітичною функцією всюди, де $f_2(z) \neq 0$.

2°. Якщо $\omega = f(z)$ є аналітичною функцією в області E площині комплексної змінної z, причому в області її значень G на площині ω визначена аналітична функція $S = \varphi(\omega)$, то функція $F(z) = \varphi\left[f(z) \right]$ є аналітичною функцією комплексної змінної z в області E.

3°. Якщо в області E визначено аналітичну функцію $f(z)$, причому $\left| f'(z) \right| \neq 0$, то в області G значень функції $f(z)$ визначено обернену функцію $z = \varphi(\omega)$, яка є аналітичною функцією аргументу ω. При цьому, якщо $\omega_0 = f(z_0)$, то має місце співвідношення $f'(z_0) = \dfrac{1}{\varphi'(\omega_0)}$.

4°. Нехай в області E площини XOY задано функцію $u(x, y)$, яка є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Тоді уявна частина цієї функції визначається з точністю до адитивної сталої.

Внаслідок умов Коші-Рімана (10.3), по заданій функції $u(x, y)$ однозначно визначається повний диференціал невідомої функції $v(x, y)$:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy .$$

§12. Гармонічні функції

Внаслідок умов Коші-Рімана (10.3) дійсна й уявна частини аналітичної функції $f(z)$ задовольняють рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ \ \left(\Delta u\neq 0;\ \Delta v\neq 0\right). \qquad (12.1)$$

Означення 12.1. Функції, які задовольняють рівняння Лапласа (12.1), називаються гармонічними.

Дві гармонічні функції, зв'язані умовами Коші-Рімана, називаються взаємно спряженими гармонічними функціями. Вони яляють собою дійсну й уявну частини деякої аналітичної функції. Завжди можна побудувати аналітичну функцію, для якої дана гармонічна функція є дійсною або уявною частиною.

***Приклад* 12.1.** Відновити аналітичну функцію

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

якщо її уявна частина $v(x,y)=e^x\cdot\sin y+2xy+5y$ і $f(0)=0$.

***Розв'язання*.**

Перевіримо, що функція $v(x,y)$ є гармонічною функцією:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y+2y\,;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^x\sin y\,;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y+2x+5\,;\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^x\sin y\ \Rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\,.$$

Враховуючи умови Коші-Рімана (10.3):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cdot\cos y+2x+5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cdot\sin y-2y\,.$$

Знайдемо повний диференціал функції $u(x,y)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \left(e^x \cos y + 2x + 5\right)dx + \left(-e^x \sin y - 2y\right)dy .$$

З цього виразу випливає, що

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} \left(e^x \cos y + 2x + 5\right)dx + \left(-e^x \sin y - 2y\right)dy + C .$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то зручно інтегрувати по ламаній, ланки якої є паралельними до координатних осей:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y_0)} \left(e^x \cos y + 2x + 5\right)dx + \left(-e^x \sin y - 2y\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{(x;y_0)}^{(x;y)} \left(e^x \cos y + 2x + 5\right)dx + \left(-e^x \sin y - 2y\right)dy + C =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \left(e^x \cos y_0 + 2x + 5\right)dx - \int\limits_{y_0}^{y} \left(e^x \sin y + 2y\right)dy + C =$$

$$= \left(e^x \cos y_0 + x^2 + 5x\right)\Big|_{x_0}^{x} + \left(e^x \cos y - y^2\right)\Big|_{y_0}^{y} + C =$$

$$= e^x \cos y_0 - e^{x_0} \cos y_0 + x^2 - x_0^2 + 5x - 5x_0 + e^x \cos y - e^x \cos y_0 -$$

$$-y^2 + y_0^2 + C = e^x \cos y + x^2 + 5x - y^2 + C_1 .$$

Тоді:

$$f(z) = e^x \cos y + x^2 + 5x - y^2 + C_1 + i\left(e^x \sin y + 2xy + 5y\right) =$$

$$= e^x\left(\cos y + i \sin y\right) + \left(x^2 + 2xyi - y^2\right) + 5\left(x + iy\right) + C_1 =$$

$$= e^{x+iy} + \left(x+iy\right)^2 + 5\left(x+iy\right) + C_1 = e^z + z^2 + 5z + C_1 .$$

Сталу C_1 знайдемо з умови $f(0) = 0$:

$$0 = e^0 - 0^2 + 5 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = -1 .$$

Остаточно отримаємо шукану функцію:

$$f(z) = e^z + z^2 + 5z - 1 .$$

Зауваження. Враховуючи умови Коші-Рімана, можна знайти функцію $u(x, y)$ іншим шляхом.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + 2x + 5 .$$

Тоді:

$$u(x, y) = \int \left(e^x \cos y + 2x + 5\right) dx + \varphi(y) = e^x \cos y + 2\frac{x^2}{2} + 5x + \varphi(y) =$$

$$= e^x \cos y + x^2 + 5x + \varphi(y) .$$

Диференціюємо цей вираз по y: $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) - e^x \sin y$, а за умови (10.2): $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, і

$$-e^x \sin y - 2y = \varphi'(y) - e^x \sin y \Rightarrow \varphi'(y) = -2y ;$$

$$\varphi(y) = -\int 2y dy = -y^2 + C .$$

Звідси випливає:

$$u(x, y) = e^x \cos y + x^2 + 5x - y^2 + C .$$

§13. Інтегрування функцій комплексної змінної

Нехай однозначна функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ є неперервною в області E комплексної площини z, і C – довільна крива яка повністю належить області E (рис. 13.1).

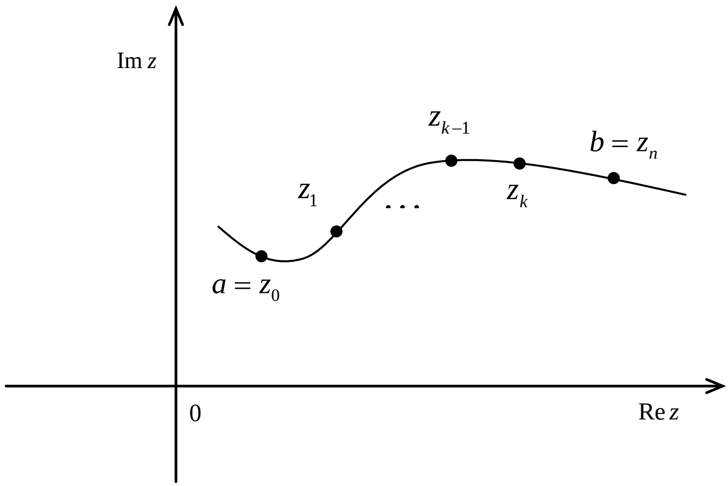

Рисунок 13.1

Розіб'ємо криву C довільним способом на n ділянок точками $z_0=0; z_1; z_2; ...; z_{k-1}; z_k; ...; z_n=b$, розташованими на кривій C в порядку зростання параметра k. Виберемо на кожній дузі $z_{k-1}z_k$ довільну точку $\xi_k=\zeta_k+i\eta_k$, і через Δz_k позначимо:

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Побудуємо інтегральну суму $I_n\left(f(z);C;\{\xi_k\}\right)$ для функції $f(z)$, яка відповідає розбиттю C і вибору точок ξ_k:

$$I_n\left(f(z);C;\{\xi_k\}\right)=\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \quad . \qquad (13.1)$$

Означення 13.1. Якщо існує скінченна границя нтегральної суми (13.1) при $n \to \infty$, яка не залежить від способу розбиття кривої C та від вибору точок $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$, то вона називається інтегралом від функції $f(z)$ вздовж кривої C і позначається $\int\limits_C f(z)dz$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \int\limits_C f(z)dz. \qquad (13.2)$$

В зроблених раніше припущеннях границя (13.2) повинна існувати, тому що зводиться до границь неперервних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ ($u(x,y)=\operatorname{Re} f(z);\, v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$), які задані на кусково-гладкій кривій C, тобто до криволінійного інтеграла по координатах.

Дійсно:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \left\| \begin{matrix} f(\xi_k) = u(\zeta_k;\eta_k)+iv(\zeta_k;\eta_k) \\ \xi_k=\zeta_k+i\eta_k;\ \Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k;\eta_k)+iv(\zeta_k;\eta_k)\right]\cdot\left[\Delta x_k+i\Delta y_k\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k;\eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k;\eta_k)\Delta y_k\right]+$$

$$+i\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k;\eta_k)\Delta y_k + v(\zeta_k;\eta_k)\Delta x_k\right].$$

Звідси випливає, що

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C u(x,y)dy + v(x,y)dx. \qquad (13.3)$$

З отриманого результата видно, що для існування інтеграла від функції комплексної змінної $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ достатньо лише неперервності функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$. Отже, інтеграл існує і в випадку неаналітичної функції $f(z)$, якщо вона також є неперервною.

Очевидно, інтеграл (13.3) володіє тими ж властивостями, що і криволінійний інтеграл по координатах.

1°. $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$;

2°. $\int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz = \int\limits_{C_1 \cup C_2} f(z)dz$;

3°. Якщо a – комплексна змінна, то

$$\int\limits_C af(z)dz = a\int\limits_C f(z)dz;$$

4°. $\int\limits_C [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int\limits_C f_1(z)dz + \int\limits_C f_2(z)dz$.

***Приклад* 13.1.** Обчислити інтеграл $\int\limits_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, де C – відрізок прямої: $\{z_1 = 0;\ z_2 = 1 + i\}$.

***Розв'язання*.**

$f(z) = z \operatorname{Im} z^2$;

$z = x + iy$;

$(x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \Rightarrow f(z) = (x+iy) \cdot \operatorname{Im}\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) =$

$= (x+iy) \cdot 2xy = 2x^2 y + i \cdot 2xy^2$;

$u(x,y) = 2xy^2$,

$v(x,y) = 2x^2 y$.

Тоді за формулою (13.3) маємо:

$$\int\limits_C z \operatorname{Im} z^2 dz = \int\limits_C 2xy^2 dx - 2x^2 y\, dy + i\int\limits_C 2xy^2 dy + 2x^2 y\, dx =$$

$$=\left\|\begin{array}{lll} z_1=0\Rightarrow A(0;0); & z_2=1+i\Rightarrow B(1;1) & \\ AB:\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y-0}{1-0}\Rightarrow & \begin{array}{c} y=x \\ dy=dx \end{array} & x:0\to 1 \end{array}\right\|=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3\,dx-2x^3\,dx\right)+i\int_0^1\left(2x^3\,dx+2x^3\,dx\right)=$$

$$=0+i\int_0^1 4x^3dx=4i\int_0^1 x^3dx=\cancel{4}i\cdot\frac{x^4}{\cancel{4}}\bigg|_0^1=i(1-0)=i\,.$$

***Приклад* 13.2.** Обчислити інтеграл $\int\limits_C(\overline{z}-4)^3\,dz$, де C – відрізок прямої: $\{z_1=i;\ z_2=2-i\}$.

Розв'язання.

$$z=x+iy\Rightarrow\overline{z}=x-iy\,;$$

$$(\overline{z}-4)^3=(x-iy-4)^3=\left((x-4)-iy\right)^3=(x-4)^3-3i(x-4)^2\,y-$$

$$-3y^2(x-4)+iy^3=\left((x-4)^3-3y^2(x-4)\right)+i\left(y^3-3(x-4)^2\,y\right).$$

$$\begin{array}{r} z_1=i\Rightarrow M_1(0;1) \\ z_2=2-i\Rightarrow M_2(2;-1) \end{array}\Rightarrow M_1M_2:\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{-1-1}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow y=-x+1\,.$$

$$\int\limits_C(\overline{z}-4)^3\,dz=\left\|\begin{array}{l} u(x,y)=(x-4)^3-3y^2(x-4) \\ v(x,y)=y^3-3(x-4)^2\,y \\ C:y=-x+1\Rightarrow dy=-dx \\ \qquad\qquad x:0\to 2 \end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_C\left[\left((x-4)^3-3y^2(x-4)\right)dx-\left(y^3-3(x-4)^2\,y\right)dy\right]+$$

$$+i\int\limits_C\left[\left((x-4)^3-3y^2(x-4)\right)dy+\left(y^3-3(x-4)^2\,y\right)dx\right]=$$

$$=\int_0^2\Big[(x-4)^3+3(1-x)^2(x-4)+(1-x)^3-3(x-4)^2(1-x)\Big]dx+$$

$$+i\int_0^2\Big[-(x-4)^3+3(1-x)^2(x-4)+(1-x)^3-3(x-4)^2(1-x)\Big]dx=$$

$$=\int_0^2\Big(x^3-12x^2+48x-64-3\left(1-2x+x^2\right)(x-4)+1-3x+3x^2-x^3-$$

$$-3\left(x^2-8x+16\right)(1-x)\Big)dx+i\int_0^2\Big(-x^3+12x^2-48x+64+$$

$$+3\left(1-2x+x^2\right)(x-4)+1-3x+3x^2-x^3-3\left(x^2-8x+16\right)(1-x)\Big)dx=$$

$$=\int_0^2\Big(-9x^2+45x-63-3x+6x^2-3x^3+12-24x+12x^2-3x^2+24x-$$

$$-48+3x^3-24x^2+48x\Big)dx+i\int_0^2\Big(-2x^3+15x^2-51x+65+3x-6x^2+$$

$$+3x^3-12+24x-12x^2-3x^2+24x-48+3x^3-24x+48x\Big)dx=$$

$$=\int_0^2\left(-18x^2+90x-99\right)dx+i\int_0^2\left(4x^3-30x^2+48x+5\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{18x^3}{3}+\frac{90x^2}{2}-99x\right)\Bigg|_0^2+i\left(\frac{4x^4}{4}-\frac{30x^3}{3}+\frac{48x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\left(-6x^3+45x^2-99x\right)\Big|_0^2+i\left(x^4-10x^3+24x^2+5x\right)\Big|_0^2=$$

$$=\left(-6\cdot8+45\cdot4-99\cdot2\right)+i\left(2^4-10\cdot2^3+24\cdot2^2+5\cdot2\right)=$$

$$=\left(-48+180-198\right)+i\left(16-80+48+10\right)=\left(-48-18\right)+i\left(74-80\right)=$$

$$=-66-6i\,.$$

В деяких випадках можна обчислювати інтеграл від функції комплексної змінної, не користуючись отриманою формулою (13.3).

***Приклад* 13.3.** Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z-z_0|=R} \dfrac{dz}{z-z_0}$.

***Розв'язання*.**

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = \left\| \begin{matrix} z-z_0 = Re^{i\varphi} \\ z = z_0 + Re^{i\varphi} \\ dz = Rie^{i\varphi} d\varphi \\ \varphi : 0 \to 2\pi \end{matrix} \right\| = \int\limits_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = i\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i .$$

***Приклад* 13.4.** Обчислити інтеграл $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz$, де C – крива $AB : \left\{ |z| = 1;\ \mathrm{Re}\, z \geq 0;\ \mathrm{Im}\, z \leq 0 \right\}$.

***Розв'язання*.**

$|z| = 1$; $\qquad x^2 + y^2 = 1$; $\qquad \rho = 1$.

$\mathrm{Re}\, z \geq 0$; $\Rightarrow$ $x \geq 0$; $\qquad \Rightarrow \dfrac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$.

$\mathrm{Im}\, z \leq 0$; $\qquad y \leq 0$.

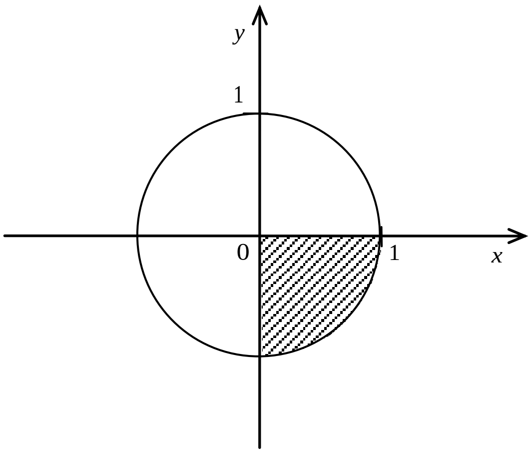

Рисунок 13.1

$$\int_C z\cdot\bar{z}dz = \left\| \begin{aligned} &z=\rho e^{i\varphi}=e^{i\varphi};\ \bar{z}=e^{-i\varphi} \\ &dz=ie^{i\varphi}d\varphi;\ \varphi:\frac{3\pi}{2}\to 2\pi \end{aligned} \right\| = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}\cdot ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{i\varphi}d\varphi = e^{i\varphi}\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = e^{2\pi i} - e^{\frac{3\pi}{2}i} = \left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) -$$

$$-\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1-\left(-i\right) = 1+i\ .$$

Якщо функція $f\left(z\right)$ є аналітичною в однозв'язній області E, яка містить точки z_1 і z_2, то має місце формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{z_1}^{z_2} f\left(z\right)dz = F\left(z\right)\Big|_{z_1}^{z_2} = F\left(z_2\right) - F\left(z_1\right). \tag{13.4}$$

де $F\left(z\right)$ – будь-яка первісна для функції $f\left(z\right)$, тобто $F'\left(z\right) = f\left(z\right)$ в області E.

***Приклад* 13.5.** Обчислити інтеграл $\int_\ell (\cos i\,\mathrm{z} + 3\mathrm{z}^2)dz$, де ℓ: $\left\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,\mathrm{z}\ge 0\right\}$.

***Розв'язання*.**

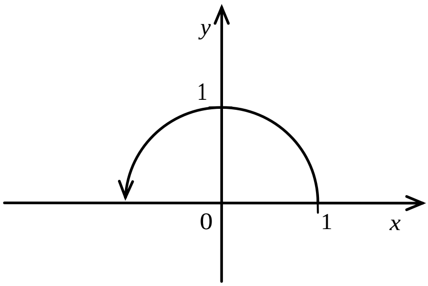

Рисунок 13.2

$|z| = 1,\ \mathrm{Im}\ z \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0 \Rightarrow$

$f(\mathrm{z}) = \cos iz + 3z^2$ – аналітична функція.

$$\int\limits_{\ell} (\cos iz + 3z^2) dz = \int\limits_{1}^{-1} (\cos iz + 3z^2) dz = \int\limits_{1}^{-1} \cos iz\, dz + 3\int\limits_{1}^{-1} z^2\, dz =$$

$$= \frac{1}{i} \sin iz \Big|_{-1}^{-1} + z^3 \Big|_{-1}^{-1} = \frac{1}{i}(\sin(-i) - \mathrm{sini}) + (-1)^3 - 1^3 = -\frac{2}{i}\sin i - 2 =$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{i} \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{\cancel{2}i} - 2 = e^{-1} - e^{1} - 2 = -2\frac{e^1 - e^{-1}}{2} - 2 = -2 \cdot \mathrm{sh}1 - 2 .$$

Приклад **13.6.** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\ell} \frac{\ln z}{z} dz$, ℓ – відрізок прямої: $\{z_1 = 1; \mathrm{z}_2 = i\}$.

Розв'язання.

$f(z) = \frac{\ln z}{z}$ – функція аналітична на відрізку прямої ℓ.

$$\int\limits_{\ell} \frac{\ln z}{z} dz = \int\limits_{1}^{i} \frac{\ln z}{z} dz = \left\| \begin{matrix} (\ln \mathrm{z})' = \frac{1}{z} \\ d(\ln z) = \frac{dz}{z} \end{matrix} \right\| = \int\limits_{1}^{i} \ln \mathrm{z}\ d(\ln z) = \frac{\ln^2 z}{2} \Big|_{1}^{i} =$$

$$= \frac{\ln^2 i}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \left\| \begin{matrix} \ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} i \\ \ln 1 = \ln 1 + i\,0 = 0 \end{matrix} \right\| = \frac{\left(\frac{\pi}{2} i\right)^2}{2} = -\frac{\pi^2}{8} .$$

§14. Теорема Коші

Значення інтеграла від функції комплексної змінної залежить від напряму інтегрування. Нехай задано область в комплексній площині, обмежену деяким замкненим контуром. Домовимося за додатний приймати такий напрям обходу контура, при якому внутрішня область залишається зліва від напряму руху. Інтегрування в додатному напрямі будемо позначати як $\int\limits_{C^+} f(\mathrm{z})\,\mathrm{dz}$ або просто $\int\limits_{C} f(z)dz$, інтегрування у від'ємному напрямі – як $\int\limits_{C^-} f(z)dz$.

Оскільки інтеграл від функції комплексної змінної визначається двома криволінійними інтегралами, то при інтегруванні по замкненому контуру повинні проявлятися властивості криволінійних інтегралів.

Теорема 14.1 (теорема Коши). Якщо $f(z)$ є однозначною аналітичною функцією в однозв'язній області E, то інтеграл від цієї функції по будь-якому замкненому контуру C, який повністю належить області E, дорівнює нулю. $(\oint\limits_{C} f(z)dz = 0)$.

Теорема Коші встановлює одну з основних властивостей аналітичної функції комплексної змінної.

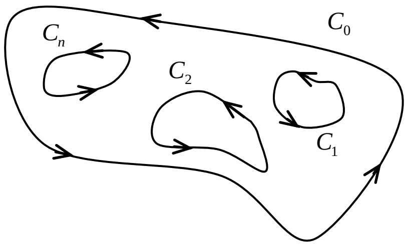

Рисунок 14.1

Теорема Коші формулювалася для однозв'язної області, однак її легко узагальнити й на випадок багатозв'язної області. В цьому випадку повна межа області складається з декількох замкнених контурів:

зовнішнього C_0 і внутрішніх C_1, C_2,..., $С_n$ (рис. 14.1). Додатним будемо називати такий напрям обходу повної границі багатозв'язної області, при якому область увесь час залишається зліва. При цьому зовнішній контур обходиться в додатному, а внутрішні – у від'ємному напрямі.

Теорема 14.2 (теорема Коши для багатозв'язної області). Нехай $f(z)$ є аналітичною функцією в багатозв'язній області $\overline{E}$, обмеженій зовні контуром C_0, а зсередини – контурами C_1, C_2,..., $С_n$. Нехай $f(z)$ – неперервна функція в замкненій області $\overline{E}$. Тоді $\int\limits_C f(z)dz = 0,$ де С – повна межа області $\overline{E}$, яка складається з контурів C_0, C_1, C_2,..., $С_n$, причому обхід границі C відбувається в додатному напрямі.

§15. Інтеграл Коші

Теорема Коші дозволяє встановити зв'язок між значеннями аналітичної функції у внутрішніх точках області її аналітичності та значеннями на межі.

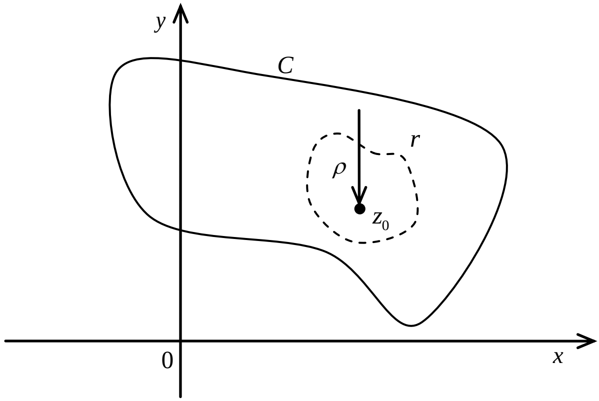

Рисунок 15.1

Нехай $f(z)$ є аналітичною функцією в однозв'язній області $\overline{E}$, обмеженій контуром С. Візьмемо довільну внутрішню точку $z_0 \in E$ і побудуємо навколо неї довільний замкнений контур r, який повністю лежить в області (рис. 15.1).

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$.

Ця функція буде аналітичною в усій області $\overline{E}$, окрім точки z_0. Якщо ж розглянути двозв'язну область, яка лежить між контуром C і r (рис. 15.1), то в ній $\varphi(z)$ буде аналітичною всюди. Згідно з теоремою Коші для двозв'язної області:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_r \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (15.1)$$

Оскільки інтеграли є рівними між собою, не зважаючи на те, що обчислюються по різних контурах, причому r – довільний контур, то вони не залежать від контура.

Єдина вимога – точка z_0 повинна лежати всередині обох контурів. Будемо вважати контуром r коло з центром в точці z_0 і радіусом ρ:

$$r : z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \ \varphi \in [0; 2\pi].$$

$$\int_r \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{\rho e^{i\varphi}} \cdot i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(z) d\varphi . \qquad (15.2)$$

Інтеграл (15.2) перетворимо наступним чином:

$$\int_0^{2\pi} f(z)dz = \int_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0) + f(z_0))d\varphi = \int_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\varphi + f(z_0) \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\varphi + f(z_0) \cdot 2\pi .$$

Наблизимо теперь ρ до нуля. Оскільки $f(z)$ – аналітична функція, то вона, відповідно, є неперервною в області E функцією, і тому: $\lim\limits_{\rho \to 0} f(z) = f(z_0)$.

Отже,

$$\lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} [f(z) - f(z_0)] d\varphi = 0 .$$

Тому що в формуле (15.1) інтеграли не залежать від контура інтегрування, то ρ можна вибрати як завгодно малим:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i 2\pi \cdot f(z_0) .$$

Отже,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz . \qquad (15.3)$$

Формула (15.3) називається інтегральною формулою Коші.

Інтегральная формула Коші дозволяє обчислити деякі інтеграли.

***Приклад* 15.1.** Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}dz$.

***Розв'язання*.**

Контур $|z-1|=\frac{1}{2}$ – коло з центром в точці $z_0=1$ і радіусом $R=\frac{1}{2}$ (рис. 15.2).

$z^2+z \neq 0, \qquad z \neq 0,$
$z(z+1) \neq 0,$
$z_1=0, \quad z_2=-1.$

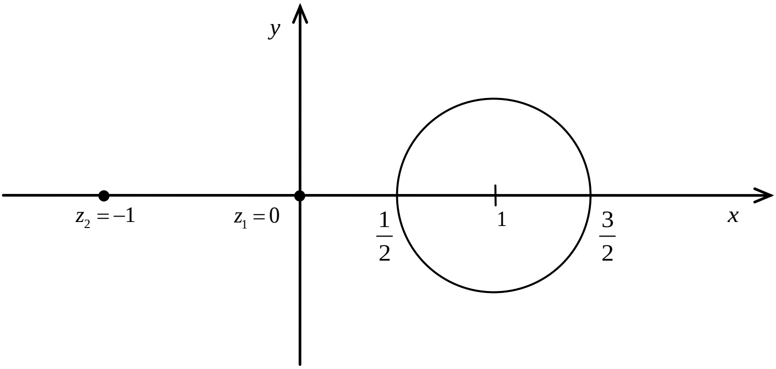

Рисунок 15.2

В точках z_1 і z_2 порушується умова аналітичності функції, але ці точки не потрапляють в область, обмежену контуром $C:|z-1|=\frac{1}{2}$. Тому за теоремою Коші

$$\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}dz=0 .$$

***Приклад* 15.2.** Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$.

***Розв'язання*.**

Всередині круга $|z| = 1 \left(x^2 + y^2 = 1^2 \right)$ знаменник дробу $\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z}$ обертається в нуль в точці $z_1 = 0$ (рис. 15.3).

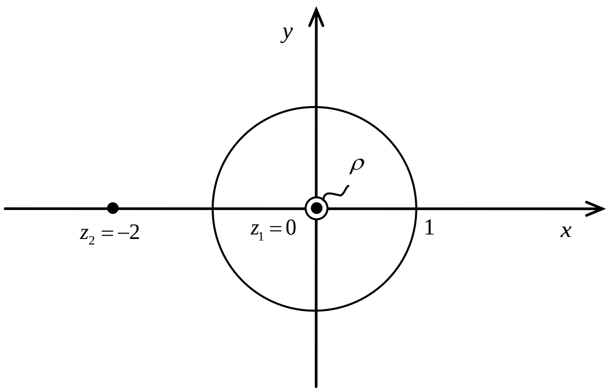

Рисунок 15.3

$\left(z^2 + 2z = 0 \Rightarrow z(z+2) = 0 \Rightarrow z_1 = 0,\ z_2 = -2 \right)$

Для застосування формули (15.3) перепишемо інтеграл у наступному вигляді:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz = \oint\limits_{\rho} \frac{\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z} dz = 2\pi i \left. \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2} \right|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^0 \cdot \cos 0}{2} = \frac{2\pi i}{2} = \pi i \, .$$

***Приклад* 15.3.** Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z+9)}$.

Розв'язання.

В області, обмеженій колом $|z| = 4$ маємо дві точки: $z = 3i$ і $z = -3i$, в яких знаменник підінтегральної функції $\dfrac{1}{(z^2+9)(z+9)}$ обертається в нуль: $(z^2+9)(z+9) = 0$ (рис. 15.4).

$$z^2 + 9 = 0, \qquad z + 9 = 0,$$
$$z^2 = 9,$$
$$z_1 = 3i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = -9,$$
$$|z| = 4 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2.$$

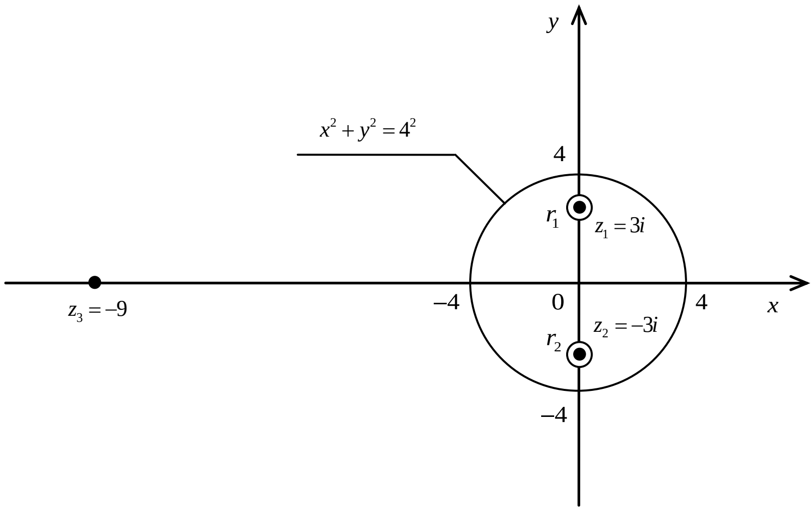

Рисунок 15.4

Безпосередньо формулу (15.3) застосовувати неможна.

Побудуємо кола r_1 і r_2 з центрами в точках $z_1 = 3i$ і $z_2 = -3i$ достатньо малих радіусів таких, щоб кола не перетинались і повністю лежали всередині круга $|z| \le 4$ (рис. 15.3).

В тризв'язной області, обмеженій колами $|z|=4, r_1$ і r_2, підінтегральна функція всюди аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язної області:

$$\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}=\oint_{r_1}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}+\oint_{r_2}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$$

До кожного інтеграла в правій частині можна застосувати інтегральну формулу Коші (15.3).

В результаті отримаємо:

$$\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}=\oint_{r_1}\frac{\frac{1}{(z+3i)(z+9)}}{z-3i}dz+\oint_{r_2}\frac{\frac{1}{(z-3i)(z+9)}}{z+3i}dz=$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{(z+3i)(z+9)}\right|_{z=3i}+2\pi i\left.\frac{1}{(z-3i)(z+9)}\right|_{z=-3i}=$$

$$=2\pi i\frac{1}{6i(3i+9)}+2\pi i\frac{1}{-6i(-3i+9)}=\frac{\pi}{3}\,\frac{9-3i}{9^2-(3i)^2}-\frac{\pi}{3}\,\frac{9+3i}{9^2-(-3i)^2}=$$

$$=\frac{\pi}{3\cdot(81+9)}\cdot(9-3i-9-3i)=\frac{\pi\cdot(-6i)}{3\cdot 90}=-\frac{\pi i}{45}.$$

§16. Степеневі ряди. Формула Коші-Адамара. Ряд Тейлора

Нехай є ряд з комплексними членами:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n , \qquad (16.1)$$

де $z_n = x_n + i\, y_n$.

Означення 16.1. Ряд (16.1) називається збіжним, якщо збігається послідовність $\{S_n\}$ його частинних сум $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. При цьому границя S послідовності $\{S_n\}$ називається сумою ряду (16.1).

Необхідною умовою збіжності ряду (16.1) є вимога виконання $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (16.2)$$

с дійсними додатними членами, то, очевидно, збігається й ряд (16.1), який в цьому випадку називається абсолютно збіжним. Одним зі способів, що найбільш часто застосовується для дослідження збіжності ряду з комплексними членами, є розгляд ряду з дійсними членами, які є модулями членів початкового ряда. Достатніми ознаками збіжності ряду з дійсними додатними членами є ознаки Даламбера і Коші:

Згідно з ознакою Даламбера ряд (16.2) збігається, якщо, починаючи з деякого номера N , виконується нерівність $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \ell < 1$ для всіх $n \ge N$. Іншими словами,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1. \qquad (16.3)$$

Згідно з ознакою Коші ряд (16.2) збігається, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1. \qquad (16.4)$$

Якщо $\ell > 1$ у виразах (16.3) або (16.4), то ряд (16.1) розбігається.

***Приклад* 16.1.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$.

Розв'язання.

За формулою Ейлера: $e^{in} = \cos n + i \sin n$.

Тоді

$$z_n = \frac{e^{in}}{n^2} = \frac{\cos n + i \sin n}{n^2} = \frac{\cos n}{n^2} + i \frac{\sin n}{n^2},$$

отже

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Таким чином, питання про збіжність даного ряду зводиться до питання про збіжність ряду з дійсними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Враховуючи, що $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ і $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, то кожен з цих рядів збігається абсолютно. Отже, даний ряд збігається абсолютно.

Розглянемо тепер функціональні ряди, членами яких є функції комплексної змінної. Нехай в області E визначено нескінченну послідовність однозначних функцій комплексної змінної $\{U_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Функціональним рядом будемо називати вираз вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z). \qquad (16.5)$$

При фіксованому значенні $z_0 \in E$ ряд (16.5) буде звичайним числовим рядом вигляду (16.1).

Означення 16.2. Функціональний ряд (16.5) називається збіжним в області E, якщо при будь-якому $z \in E$ відповідний йому числовий ряд збігається.

Якщо ряд (16.5) збігається в області E, то в цій області можна визначити однозначну функцію $f(z)$, значення якої в кожній точці області E дорівнює сумі відповідного числового ряду (16.5) в області E.

Для функцій комплексної змінної найбільш цікавими є степеневі ряди, для яких $U_n(z) = C_n \cdot (z - z_0)^n$, де C_n – деякі комплексні числа, а z_0 – фіксована точка комплексної площини.

Члени ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z - z_0)^n$ є аналітичними функціями на всій комплексній площині, тому для дослідження властивостей даного ряду можна застосовувати попередні твердження.

Для означення області збіжності степеневого ряду суттєвою виявляється наступна теорема.

Теорема 16.1 (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (16.6)$$

збігається при деякому значенні $z = z_0$, то він збігається, і причому абсолютно, при всіх значеннях z, для яких $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Якщо ряд (16.6) розбігається при $z = z_2, z_2 \neq z_0$, то він розбігається при будь-якому значенні z, для якого $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

З теорії степеневих рядів відомо, що всередині області збіжності вони збігаються рівномірно, тобто їх можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число раз, причому область збіжності при цьому не зміниться.

Область збіжності ряду (16.6) – це круг з центром в точці z_0. Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} \quad (\mathrm{C}_n \neq 0), \tag{16.7}$$

або

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}}, \tag{16.8}$$

якщо відповідні границі існують.

Формулу (16.8) часто називають формулою Коші-Адамара. Всередині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції $f(z)$. Коефіцієнти степеневого ряду (16.6) виражаються через значення суми ряду $f(z)$ та її похідних у центрі кола збіжності за формулами

$$C_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0). \tag{16.9}$$

Таким чином, степеневий ряд всередині круга збіжності визначає аналітичну функцію. Природно поставити питання: чи можна будь-якую функцію, аналітичну в крузі радіуса R, зобразити у вигляді степеневого ряду, що до неї збігається?

Теорема 16.2 (теорема Тейлора). Будь-яка функція $f(z)$, аналітична всередині круга $|z - z_0| < R$, може бути зображеною в цьому крузі збіжним до неї степеневим рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \tag{16.10}$$

На практиці, якщо це можливо, використовують відомі розклади в ряд Тейлора елементарних функцій. Наприклад, такі:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (16.11)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad (16.12)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (16.13)$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad (16.14)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (16.15)$$

Розклади 16.11-16.15 мають місце при $|z| < \infty$.

Для функцій $\ln(1+z)$ і $(1+z)^\alpha$ мають місце наступні розклади в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad (16.16)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\mathrm{n}+1)}{n!} z^n \ldots. \qquad (16.17)$$

Зокрема, при $\alpha = 1$ отримаємо:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad (16.18)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \qquad (16.19)$$

Розклади (16.16) – (16.19) мають місце при $|z| < 1$ (тобто $R = 1$).

***Приклад* 16.2.** Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$ функцію $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 5z + 6}$.

Розв'язання.

Розкладемо дану функцію на найпростіші дроби:

$$\frac{z}{z^2 - 5z + 6} = \left\| \begin{matrix} z^2 - 5z + 6 = 0,\ D = 25 - 24 = 1 \\ z_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \left[\begin{matrix} 3 \\ \\ 2 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right\| = \frac{z}{(z-3)(z-2)} =$$

$$= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2) + B(z-3)}{(z-3)(z-2)}, \qquad A(z-2) + B(z-3) = z.$$

$$\begin{aligned} z = 2| \quad & -B = 2 \quad \Rightarrow B = -2 \\ z = 3| \quad & A = 2 \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{3}{z-3} - \frac{2}{z-2}.$$

Перетворимо праву частину наступним чином:

$$f(z) = \frac{3}{-3(1 - \frac{z}{3})} - \frac{2}{-2(1 - \frac{z}{2})} = -\frac{1}{1 - \frac{z}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Застосовуючи розклад (16.19) функції $\dfrac{1}{1-z}$, отримаємо:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \cdot z^n.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n$ збігається в області $\left| \dfrac{z}{3} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 3$;

Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n$ збігається в області $\left| \dfrac{z}{2} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$.

Таким чином, отриманий ряд збігається в крузі $|z| < 2$.

***Приклад* 16.3.** Розкласти по степенях різниці $z-5$ функцію $f(z)=\dfrac{1}{7+3z}$.

***Розв'язання*.**

Перетворимо початкову функцію:

$$f(z)=\frac{1}{7+3(z-5+5)}=\frac{1}{7+3(z-5)+15}=\frac{1}{22+3(z-5)}=\frac{1}{22}\,\frac{1}{1+\frac{3}{22}(z-5)}.$$

Замінивши в розкладі (16.18) z на $\dfrac{3}{22}(z-5)$, отримаємо:

$$f(z)=\frac{1}{22}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{22}(z-5)\right)^n=\frac{1}{22}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{22^n}(z-5)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{22^{n+1}}(z-5)^n.$$

Цей ряд збігається за умови

$$\left|\frac{3}{22}(z-5)\right|<1 \text{ або } |z-5|<\frac{22}{3},$$

тобто радіус збіжності ряду $R=\dfrac{22}{3}$.

§17. Ряди Лорана

У ряді Тейлора сумування відбувається від 0 до $+\infty$. З'ясуємо, що буде, якщо сумування буде відбуватися від $-\infty$ до $+\infty$.

Означення 17.1. Рядом Лорана називається степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n . \tag{17.1}$$

Ряд (17.1), очевидно, можна зобразити у вигляді:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} . \tag{17.2}$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \tag{17.3}$$

називається правильною частиною ряду Лорана.

Ряд (17.3) являє собою ряд Тейлора, отже, його область збіжності – круг з центром в точці z_0: $|z - z_0| < R_1$. Всередині цього круга ряд збігається до аналітичної функції $f_1(z)$.

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{17.4}$$

називається головною частиною ряду Лорана.

Для означення області збіжності ряду (17.4) зробимо заміну: $\dfrac{1}{z - z_0} = \xi$, тоді ряд набуває вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n}\ \xi^n$. Але це вже звичайний степеневий ряд, його областю збіжності буде круг радіуса $\dfrac{1}{R_2} : |\xi| < \dfrac{1}{R_2}$.

В цьому крузі ряд збігається до аналітичної функції $f_2(z)$. Але з $|\xi| < \dfrac{1}{R_2}$ випливає, що $|z - z_0| > R_2$. Отже, ряд по від'ємних степенях $(z - z_0)$ збігається поза колом радіуса R_2.

Загальною областю збіжності початкового ряду буде переріз областей збіжності рядів (17.3) і (17.4). Якщо $R_2 < R_1$, то областю збіжності ряду (17.2) буде кільце $R_2 < |z - z_0| < R_1$, де обидва ряди збігаються до аналітичних функцій $f_1(z) + f_2(z) = f(z)$. Якщо $R_1 \le R_2$, то ряд Лорана не має області збіжності.

Розглянемо тепер обернену задачу: чи можна функції $f(z)$, аналітичній у кільці, поставити у відповідність ряд Лорана?

Теорема 17.1. Будь-яка функція $f(z)$, аналітична в кільці $R_2 < |z - z_0| < R_1$, може бути зображеною у вигляді ряду Лорана (17.1), де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \, , \; n = (0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

На практиці при знаходженни коеффиціента C_n намагаються уникати застосування даної формули, тому що вона може приводити до громіздких обчислень. Для цього, якщо можливо, використовують готові розклади в ряд Тейлора елементарних функцій.

***Приклад* 17.1.** Розкласти функцію $f(z) = \dfrac{5z + 1}{z^2 - z - 6}$ в ряд Лорана по степенях z.

Розв'язання.

Функція $f(z)$ має дві особливі точки:

$$z^2 - z - 6 = 0,$$
$$z_1 = 2, \; z_2 = 3.$$

Отже, є три кільця з центром в точці $z_0 = 0$, в кожному з яких $f(z)$ є аналітичною функцією (рис. 17.1).

I) $|z| < 2$,
II) $2 < |z| < 3$,
III) $|z| > 3$.

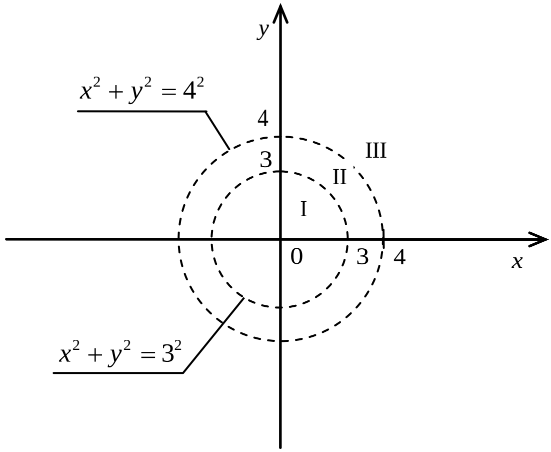

Рисунок 17.1

Знайдемо ряди Лорана для функції $f(z)$ в кожному з цих кілець. Зобразимо $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів.

$$f(z) = \frac{5z+1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} = \frac{A(z-3)+B(z-2)}{(z-2)(z-3)},$$

$$A(z-3) + B(z-2) = 5z+1.$$

$$z = 2 \,\big|\, -A = 11 \quad \Rightarrow A = -11$$
$$z = 3 \,\big|\, B = 16$$

$$f(z) = -\frac{11}{z-2} + \frac{16}{z-3}. \tag{17.5}$$

I) Розкладемо початкову функцію в крузі $|z| < 2$. Перетворимо її наступним чином:

$$f(z) = -\frac{11}{z-2} + \frac{16}{z-3} = -\frac{11}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} + \frac{16}{-3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

Користуючись формулою (16.18), отримаємо:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\ ; \tag{17.6}$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2\ ;$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} \tag{17.7}$$

$$\left(\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 3\right).$$

Підставляючи (17.6) і (17.7) в (17.5) , отримаємо:

$$\frac{5z+1}{z^2-z-6} = \frac{11}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{16}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{11}{2^{n+1}} - \frac{16}{3^{n+1}}\right)z^n\ ,$$

і область збіжності отриманого ряду – $|z| < 2$.

Цей розклад є рядом Тейлора функції $f(z)$ в крузі $|z| < 2$.

II) Розкладемо $f(z)$ у кільці $2 < |z| < 3$. Ряд (17.7) для функції $\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$ залишається збіжним в цьому кільці, тому що $|z| < 3$. Ряд для функції $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ розбігається для $|z| > 2$.

Тому перетворимо $f(z)$ наступним чином:

$$f(z)=-\frac{11}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{16}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \qquad (17.8)$$

Застосовуючи формулу (16.18), отримаємо

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}. \qquad (17.9)$$

Цей ряд збігається для $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, тобто при $|z|>2$.

Підставляючи (17.9) і (17.7) в (17.8), отримаємо:

$$f(z)=\frac{5z+1}{z^2-z-6}=-\frac{11}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-11\cdot 2^n}{z^{n+1}}-\frac{16}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-11\cdot 2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{3^{n+1}}\cdot z^n.$$

III) Розкладемо $f(z)$ для $|z|>3$. Ряд (17.9) для функції $\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$ буде збіжним при $|z|>3$, а для функції $\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$ буде розбігатися.

Функцію $f(z)$ зобразимо у вигляді:

$$f(z)=-\frac{11}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{16}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}. \qquad (17.10)$$

Користуючись формулою (16.8), отримаємо:

$$\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}\text{, де }\left|\frac{3}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>3. \qquad (17.11)$$

Підставимо (17.9) і (17.11) в (17.10), отримаємо:

$$f(z) = -\frac{11}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} + \frac{16}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-11\cdot 2^n + 16\cdot 3^n)}{z^{n+1}}.$$

Цей приклад показує, що для однієї й тієї ж функції $f(z)$ ряд Лорана, взагалі кажучи, має різний вигляд для різних кілець.

***Приклад* 17.2.** Знайти всі Лоранівські розклади для функції $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 9}$ по степенях $z - z_0$, де $z_0 = 2 - 3i$.

***Розв'язання*.**

Зобразимо функцію у вигляді:

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 9} = \frac{1}{z - 3} + \frac{1}{z + 3}. \tag{17.12}$$

У функції $f(z)$ є дві особливі точки: $z_1 = 3$ і $z_2 = -3$.

Відповідно, є три кільця з центром в точці $z_0 = 2 - 3i$, в кожному з яких функція $f(z)$ є аналітичною (рис. 17.2).

I) Враховуючи, що

$$|z_1 - z_0| = |3 - 2 + 3i| = |1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10},$$

маємо $|z - 2 + 3i| < \sqrt{10}$.

II) Враховуючи, що

$$|z_2 - z_0| = |-3 - 2 + 3i| = |-5 + 3i| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34},$$

маємо $\sqrt{10} < |z - 2 + 3i| < \sqrt{34}$.

III) $|z - 2 + 3i| > \sqrt{34}$.

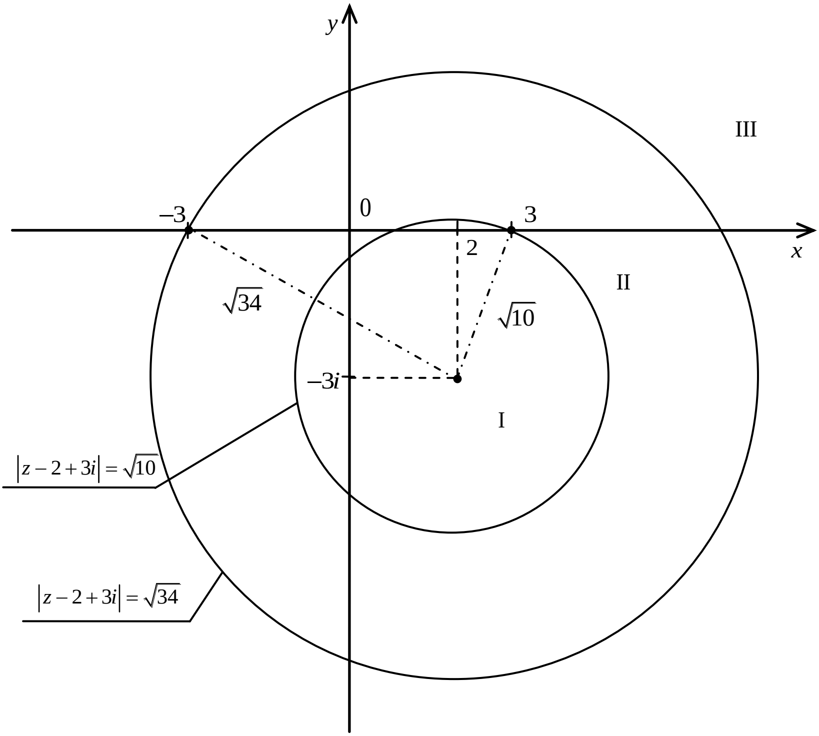

Рисунок 17.2

Тепер діємо аналогічно з прикладом 1, використовуючи формули (16.17) і (16.18).

I) $$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z-3-2+3i+2-3i} + \frac{1}{z+3-2+3i+2-3i} =$$

$$= \frac{1}{-1-3i+(z-2+3i)} + \frac{1}{5-3i+(z-2+3i)} = \frac{1}{-1-3i} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-2+3i}{-1-3i}} +$$

$$+ \frac{1}{5-3i} \frac{1}{1+\dfrac{z-2+3i}{5-3i}} . \qquad (17.13)$$

Отже, при $\left|\frac{z-2+3i}{-1-3i}\right|<1$, тобто при

$$|z-2+3i|<|-1-3i| \quad \text{або} \quad |z-2+3i|<\sqrt{10}$$

можна отримати розклад функції $\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2+3i}{-1-3i}}$ в ряд:

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-2-3i}{1+3i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2+3i}{1+3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{z}-2+3i)^n}{(1+3i)^n}. \qquad (17.14)$$

Аналогічно, при $\left|\frac{z-2+3i}{5-3i}\right|<1$, тобто при $|z-2+3i|<|5-3i|$ або $|z-2+3i|<\sqrt{34}$ можна отримати розклад в ряд функції $\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2+3i}{5-3i}}$:

$$\frac{1}{1+\dfrac{z-2+3i}{5-3i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2+3i}{5-3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2+3i)^n}{(5-3i)^n}. \qquad (17.15)$$

Оскільки $\sqrt{10}<\sqrt{34}$, розклад (17.15) є справедливим у крузі $|z-2+3i|<\sqrt{10}$. Поєднуючи (17.14) і (17.15), отримаємо розклад функції (17.13) в ряд:

$$\frac{2z}{z^2-9}=-\frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+3i)^n}{(1+3i)^n}+\frac{1}{5-3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2+3i)^n}{(5-3i)^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(5-3i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+3i)^{n+1}}\right)\cdot(z-2+3i)^n. \qquad (17.16)$$

II) При $|z-2+3i|>\sqrt{10}$ ряд (17.14) розбігається. Тому зобразимо функцію $\dfrac{1}{z-3}$ по-іншому:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2+3i-(1+3i)}=\frac{1}{z-2+3i}\,\frac{1}{1-\dfrac{1+3i}{z-2+3i}}. \qquad (17.17)$$

Тоді

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2+3i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{z-2+3i}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+3i\right)^{n}}{\left(z-2+3i\right)^{n+1}}. \qquad (17.18)$$

Причому, отриманий ряд збігається при $\left|\dfrac{1+3i}{z-2+3i}\right|<1$, тобто при $|z-2+3i|>|1+3i|$ або $|z-2+3i|>\sqrt{10}$.

Тепер у кільці $\sqrt{10}<|z-2+3i|<\sqrt{34}$, додаючи ряд (17.18) до ряду (17.15), отримуємо другий розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+3i\right)^{n}}{(z-2+3i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{\left(z-2+3i\right)^{n}}{(5-3i)^{n}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+3i\right)^{n-1}}{(z-2+3i)^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{\left(z-2+3i\right)^{n}}{(5-3i)^{n}}. \qquad (17.19)$$

III) При $|z-2+3i|>\sqrt{34}$ ряд (17.15) також виявляється розбіжним. Тоді:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z-2+3i+5-3i}=\frac{1}{z-2+3i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5-3i}{z-2+3i}}.$$

Розкладаючи в ряд, отримаємо:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z-2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{\left(5-3i\right)^{n}}{(z-2+3i)^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{\left(5-3i\right)^{n}}{(z-2+3i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(5-3i)^{n-1}}{(z-2+3i)^{n}}. \qquad (17.20)$$

Цей ряд збігається при $\left|\dfrac{5-3i}{z-2+3i}\right|<1$, тобто при $|z-2+3i|>\sqrt{34}$.

Додаючи ряди (17.18) і (17.20), отримаємо третій розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана у кільці $|z-2+3i|>\sqrt{34}$:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3i)^{n-1}}{(z-2+3i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-3i)^{n-1}}{(z-2+3i)^n}(-1)^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((1+3i)^{n-1}+(-1)^n(5-3i)^{n-1}\right)}{(z-2+3i)^n}. \qquad (17.21)$$

***Приклад* 17.3.** Розкласти функцію $f(\text{z})=(z-2)^2\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$ в ряд Лорана у кільці $0<|z-2|<\infty$.

Розв'язання.

Функція $f(\text{z})=(z-2)^2\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$ є аналітичною у кільці $0<|z-2|<\infty$.

Оскільки для будь-якого комплексного ω: $\cos\omega=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\omega^{2n}}{(2n)!}$,

то, вважаючи $\omega=\dfrac{1}{z-2}$, отримаємо шуканий лоранівський розклад:

$$(\text{z}-2)^2\cos\frac{1}{z-2}=(z-2)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z-2)^{2n-2}}$$

$$=(z-2)^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{6!}\frac{1}{(\text{z}-2)^4}+..+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^{2n-2}}.$$

§18. Класифікація особливих точок функції комплексної змінної

В §17 було показано, що, якщо функція $f(z)$ аналітична у кільці $R_2 < |z - z_0| < R_1$, то вона може бути розкладеною в цьому кільці в збіжний ряд Лорана. Нехай тепер $R_2 = 0$, тоді функція буде аналітичною у кільці $0 < |z - z_0| < R$, з якого виколото точку $z = z_0$.

Означення 18.1. Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо ця функція є однозначною і аналітичною у кільці $0 < |z - z_0| < \rho$, а точка z_0 є особливою точкою функції $f(z)$ (тобто, в точці $z = z_0$ функція не визначена).

***Приклад* 18.1.** Встановити, які точки є ізольованими особливими точками функції $f(z) = \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2z}$.

***Розв'язання*.**

Функція $f(z) = \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2z}$ не визначена в тих точках, в яких знаменник обертається в нуль:

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2z} = \frac{\cos\frac{\pi}{2z}}{\sin\frac{\pi}{2z}} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2z} \neq 0, \; z_0 \neq 0, \qquad \frac{\pi}{2z} \neq \pi n, \; n \in Z,$$

$$z_n \neq \frac{1}{2n}, \; n \in Z / \{0\},$$

тобто знаменник обертається в нуль в точці $z_n \neq \dfrac{1}{2n}$ $n \in Z / \{0\}$ і в точці $z_0 = 0$, яка не входить в множину точок $\{Z_n\}$.

При $n \to \infty$ $\{Z_n\} \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0.$$

Тому точка $z_0 = 0$, яка є особливою точкою функції $f(z)$, не є ізольованою. Такі точки в даній класифікації особливих точок не розглядаються.

Дослідимо поведінку функції $f(z)$ в околі ізольованої особливої точки z_0. Розглянемо три випадка.

1) Ряд Лорана функції $f(z)$ у кільці $0 < |z - z_0| < R$ не містить доданки з від'ємними степенями:

$$f(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \ldots + \mathrm{C}_n (z - z_0)^n + \ldots .$$

В цьому випадку існує граничне значення функції $f(z)$ при $z \to z_0$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C_0.$$

Якщо довизначити функцію $f(z)$ в точці $z = z_0$: $f(z) = C_0$, то функція $f(z)$ буде аналітичною в крузі $|z - z_0| < R$.

Цей випадок є аналогічним усувному розриву функції дійсної змінної.

Означення 18.2. Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ називається усувною, якщо ряд Лорана цієї функції в околі точки z_0 не містить членів з від'ємними степенями $(z - z_0)$.

Очевидно, якщо точка $z = z_0$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$, то в цьому випадку існує скінченна границя функції в цій точці:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \quad (\neq \infty). \tag{18.1}$$

2) Ряд Лорана функції $f(z)$ у кільці $0 < |z - z_0| < R$ містить скінченне число k доданків з від'ємними степенями $(z - z_0)$, тобто:

$$f(z)=\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{C_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^k}\left[C_{-k}+C_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+C_0(z-z_0)^k+\ldots\right]=\frac{\omega(z)}{(z-z_0)^k}.$$

Оскільки $\omega(z)$ зображена у вигляді степеневого ряду, то вона буде аналітичною в крузі $|z-z_0|<R$.

Отже,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty. \tag{18.2}$$

Означення 18.3. Ізольована особлива точка функції $f(z)$ називається полюсом порядку k, якщо її розклад в ряд Лорана містить k доданків з від'ємними степенями $(z-z_0)$, іншими словами, виконується умова (18.2).

Означення 18.4. Якщо порядок полюса $k=1$, то ізольована особлива точка називається простим полюсом.

Означення 18.5. Точка z_0 називається нулем функції порядку k (або кратності k), якщо виконуються умови:

$$f(z)=0;\ f'(z_0)=0;\ \ldots;\ f^{(k-1)}(z_0)=0;\ f^{(k)}(z_0)\neq 0. \tag{18.3}$$

Зауважимо, що точка z_0 тоді й тільки тоді є нулем k-го порядку функції $f(z)$, коли в деякому околі цієї точки має місце рівність:

$$f(z)=(z-z_0)^k\ \varphi(z), \tag{18.4}$$

де функція $\varphi(z)$ є аналітичною в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

З означення (18.3) випливає, що точка z_0 є полюсом для функції $f(z)$ порядку $k\in \mathrm{N}$, якщо ця точка є нулем порядку k для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Таким чином,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\,(z-z_0)^k = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^k\cdot\varphi(z)}\cdot(z-z_0)^k =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq \infty\,.$$

Отже, для означення порядку полюса необхідно знайти такий степень $k \in \mathrm{N}$, для якого:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^k \neq \begin{cases}\infty,\\ 0.\end{cases} \tag{18.5}$$

3) Ряд Лорана функції $f(z)$ у кільці $0<|z-z_0|<R$ містить нескінченне число членів з від'ємними степенями $(z-z_0)$, тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n\,. \tag{18.6}$$

Означення 18.6. Ізольована особлива точка функції $f(z)$ називається істотно особливою точкою, якщо розклад в ряд Лорана в околі точки z_0 має вигляд (18.6).

В цьому випадку границі функції $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ в цій точці не існує.

***Приклад* 18.2.** Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ і встановити їхній характер $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$.

Розв'язання.

Знайдемо особливі точки функції.

$$z(e^z-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0\\ e^z-1=0\end{cases} \Rightarrow e^z=1\,;$$

$$z=\mathrm{Ln}\,(1)=\ln 1+i(0+2\pi n)\,,\; n\in \mathrm{Z} \;\Rightarrow \begin{cases}\tilde z=0,\\ z_n=2\pi n i,\; n\in Z.\end{cases}$$

При $k=0$ отримуємо $z_0=\tilde{z}$.

Точки $\{Z_n\}$ – ізольовані особливі точки функції.

Додслідимо поведінку функції в околах цих точок:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z(e^z-1)}=\left|\frac{1}{0}\right|=\infty .$$

Отже, $z_0=0$ – полюс функції $f(z)$.

Визначимо порядок полюса, користуючись формулою (18.5):

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z(e^z-1)}\cdot z^k=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{z^k}{z\cdot z}=\left|\text{при } k=2\right|=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z^2}=1 .$$

Отже, $z_0=0$ – полюс 2-го порядку.

$$\lim_{\substack{z\to z_n\\(n\neq 0)}} f(z)=\lim_{\substack{z\to 2\pi ni\\ n\neq 0}}\frac{1}{z(e^z-1)}=\left|\frac{1}{0}\right|=\infty .$$

$$\lim_{\substack{z\to z_n\\(n\neq 0)}}) f(z)\cdot(\text{z}-z_n)^k=\lim_{\substack{z\to 2\pi ni\\ n\neq 0}}\frac{1}{z(e^z-1)}\cdot(z-2\pi ni)^k=\lim_{\substack{z_n\to 2\pi ni\\ n\neq 0}}\frac{(z-2\pi ni)^k}{z(e^z-e^{2\pi ni})}=$$

$$=\lim_{\substack{z_n\to 2\pi ni\\ n\neq 0}}\frac{(z-2\pi ni)^k}{z\cdot e^{2\pi ni}(e^{z-2\pi ni}-1)}=\lim_{\substack{z_n\to 2\pi ni\\ n\neq 0}}\frac{(z-2\pi ni)^k}{z\cdot e^{2\pi ni}(z-2\pi ni)}=\left\|\text{при } k=1\right\|=$$

$$=\lim_{z_n\to 2\pi ni}\frac{1}{z\cdot e^{2\pi ni}}=\frac{1}{2\pi nie^{2\pi ni}}=\frac{-i}{2\pi n} .$$

Отже, $z_n=2\pi ni$ $\left(n\in \text{Z}/\{0\}\right)$ – прості полюси функції.

***Приклад* 18.3.** Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ і встановити їхній характер $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$.

***Розв'язання*.**

Функція $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$ має єдину особливу точку $z=1$. Покажемо, що границя $f(z)$ при $z\to 1$ не існує. Дійсно, можна вибрати дві різні послідовності $\left\{Z_n^1\right\}$ і $\left\{Z_n^2\right\}$, які збігаються до одиниці, такі що $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathrm{Z}_n^1) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n^2)$.

Нехай

$$Z_n^1 = \left\{1+\frac{1}{2\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \; Z_n^2 = \left\{1+\frac{2}{\pi(1+4n)}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Тоді:

$$f(Z_n^1) = \cos\frac{1}{1+\frac{1}{2\pi n}-1} = \cos 2\pi n = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(Z_n^1) = 1;$$

$$f(Z_n^2) = \cos\frac{1}{1+\frac{2}{\pi(1+4n)}-1} = \cos(\frac{\pi}{2}+2\pi n) = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(Z_n^2) = 0.$$

Оскільки для різних послідовностей $\left\{Z_n\right\}$, які збігаються до одиниці, виходить різний результат, то границі функції $f(z) = \cos\frac{1}{z-1}$ при $z \to 1$ не існує, а отже, точка $z = 0$ – істотно особлива точка для даної функції.

§19. Лишки та їх обчислення

Нехай точка $z = z_0$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$, аналітичної у кільці $0 < |z - z_0| < R$. Тоді функція $f(z)$ може бути розкладеною в ряд Лорана (17.1), де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz .$$

При $n = -1$ маємо:

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz . \tag{19.1}$$

Означення 19.1. Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називається число, яке дорівнює $\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C f(z)dz,$ де C – контур, всередині якого міститься точка z_0.

Позначається лишок функції наступним чином:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz . \tag{19.2}$$

З формули (19.1), випливає, що

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} . \tag{19.3}$$

Якщо $z = z_0$ – усувна особлива точка функції $f(z)$, то з означення лишка функції (19.1) та означення усувної особливої точки функції (18.2) маємо:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0 . \tag{19.4}$$

Якщо $z = z_0$ – простий полюс функції $f(z)$, то з означення (18.4) маємо:

$$f(z) = C_{-1}(z - z_0)^{-1} + C_0 + C_1(\mathrm{z} - z_0) + \dots . \qquad (19.5)$$

Помножимо обидві частини (19.5) на $(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)$ і розглянемо границю:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) = \lim_{z \to z_0} (C_{-1} + C_0(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + C_0(z - z_0)^2 + \dots,$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) = C_{-1} .$$

З означення (19.1) для простого полюса отримуємо:

$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) . \qquad (19.6)$$

Якщо точка z_0 є полюсом k -го порядку, то з означення 18.3 випливає:

$$f(z) = C_{-k}(z - z_0)^{-k} + C_{-k+1}(z - z_0)^{-k+1} + C_{-1}(\mathrm{z} - z_0)^{-1} + C_0 + \dots . \qquad (19.7)$$

Помножимо (19.7) на $(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^k$:

$$(z - z_0)^k \cdot f(z) = C_{-k} + C_{-k+1}(z - z_0)^{-k+1} + C_{-1}(\mathrm{z} - z_0)^{k-1} + C_0(z - z_0) + \dots . \qquad (19.8)$$

Візьмемо $(k-1)$ похідних від обох частин рівності (19.8):

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z - z_0)^k f(z)\right] = (k-1)! \cdot \mathrm{C}_{-1} + k! C_0(z - z_0) + \dots . \qquad (19.9)$$

З виразу (19.9) лишка функції маємо:

$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \frac{1}{(\mathrm{k} - 1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z - z_0)^k \cdot f(z)\right]. \qquad (19.10)$$

У випадках істотно особливих точок, єдиний спосіб знаходження лишків в них – розклад даної функції в ряд Лорана.

***Приклад* 19.1.** Знайти лишки в особливих точках наступної функції $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi}{3} z}$.

Розв'язання.

Знайдемо особливі точки функції:

$$z^2 - \frac{\pi}{3} z = 0 \Rightarrow z(z - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0, \\ z_2 = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Додслідимо поведінку функції в околах цих точок:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi}{3} z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z(z - \frac{\pi}{3})} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{\pi}.$$

Точка $z = 0$ – усувна особлива точка, а за формулою (19.4).

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi}{3} z} = 0.$$

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi}{3} z} = \left\| \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{0} \right\| = \infty \Rightarrow z = \frac{\pi}{3}$$ – полюс функції.

Визначимо порядок полюса:

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi}{3} z} \cdot (z - \frac{\pi}{3})^k = \lim_{z \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin z \cdot (z - \frac{\pi}{3})^k}{z(z - \frac{\pi}{3})} = \| \text{при } k = 1 \| =$$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin z}{z} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \Rightarrow z = \frac{\pi}{3}$$ – простий полюс.

Враховуючи формулу (19.6) для простого полюса функції, маємо:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{3}} \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi}{3} z} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

***Приклад* 19.2.** Знайти лишки в особливих точках наступної функції $f(z) = z^4 \cdot e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язання.

Знайдемо особливі точки функції: $z \neq 0$.

Аналогічно до прикладу §18 (2) розглянемо дві різні послідовності, які збігаються до нуля:

$$\{Z_n'\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow f(Z_n') = \frac{1}{16n^4} e^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty,$$

$$\{Z_n''\} = \left\{-\frac{1}{2n}\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow f(Z_n'') = \frac{1}{16n^4} e^{-2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n^1) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n^2) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{z\to 0} z^4 e^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \quad z = 0$ – істотно особлива точка функції.

Враховуючи означення 19.1 для знаходження лишка, розкладемо функцію в ряд Лорана:

$$z^4 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = z^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{n!} = z^4 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{4!} + \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{5!} + \dots \right) = z^4 + z^3 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{5!} + \dots$$

$$C_{-1} = \frac{1}{5!} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} z^4 \cdot e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

***Приклад* 19.3.** Знайти лишки в особливих точках наступної функції $f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}$.

***Розв'язання*.**

Особливими точками функції являются:

$$z^5+z^4=0 \Rightarrow z^4\left(z+1\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=0, \\ z_2=-1. \end{array}\right.$$

Додслідимо характер особливих точок:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{z^4\left(z+1\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{2}{z^3\left(z+1\right)}=\left|\frac{2}{0}\right|=\infty,$$

$z=0$ – полюс функції.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}\cdot z^k=\lim_{z\to 0}\frac{2z\cdot z^k}{z^4\left(z+1\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{2\cdot z^k}{z^3\cdot\left(z+1\right)}=\left\|\text{при } k=3\right\|=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2}{z+1}=2.$$

$z=0$ – полюс 3-го порядку.

Враховуючи формулу (19.10), маємо:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}=\frac{1}{\left(3-1\right)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}\cdot z^3\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^{2z}-1}{z^2+z}\right)=$$

$$=\left\|\left(\frac{e^{2z}-1}{z^2+z}\right)^{(1)}=\frac{2e^{2z}\cdot\left(z^2+z\right)-\left(e^{2z}-1\right)\left(2z+1\right)}{\left(z^2+z\right)^2}=\right.$$

$$=\frac{e^{2z}\left(2z^2+2z-2z-1\right)}{\left(z^2+z\right)^2}+\frac{2z+1}{\left(z^2+z\right)^2}=e^{2z}\,\frac{2z^2-1}{\left(z^2+z\right)^2}+\frac{2z+1}{\left(z^2+z\right)^2}.$$

$$\left(\frac{e^{2z}-1}{z^2+z}\right)^{(2)} = 2e^{2z}\cdot\frac{2z^2-1}{\left(z^2+z\right)^2} + e^{2z}\cdot\frac{4z\left(z^2+z\right)^{\cancel{2}} - 2\cancel{\left(z^2+z\right)}(2z+1)\cdot(2z^2-1)}{\left(z^2+z\right)^{\cancel{4}\;3}} +$$

$$+\frac{2\cdot\left(z^2+z\right)^{\cancel{2}} - 2\cancel{\left(z^2+z\right)}\cdot\left(2z+1\right)\left(2z+1\right)}{\left(z^2+z\right)^{\cancel{4}\;3}} = 2e^{2z}\cdot\frac{2z^2-1}{\left(z^2+z\right)^2}+$$

$$+e^{2z}\,\frac{4z^3+4z^2-2\left(4z^3+2z^2-2z-1\right)}{\left(z^2+z\right)^3}+\frac{2z^2+2z-2\left(4z^2+4z+1\right)}{\left(z^2+z\right)^3}=$$

$$=e^{2z}\,\frac{\left(4z^2-2\right)\left(z^2+z\right)+\left(4z^3+\cancel{4z^2}-8z^3-\cancel{4z^2}+4z+2\right)}{\left(z^2+z\right)^3}+$$

$$+\frac{2z^2+2z-8z^2-8z-2}{\left(z^2+z\right)^3}=e^{2z}\,\frac{4z^4+\cancel{4z^3}-2z^2-2z-\cancel{4z^3}+4z+2}{\left(z^2+z\right)^3}+$$

$$+\frac{-6z^2-6z-2}{\left(z^2+z\right)^3}=e^{2z}\,\frac{4z^4-2z^2+2z+2}{\left(z^2+z\right)^3}-\frac{6z^2+6z+2}{\left(z^2+z\right)^3}=$$

$$=2\,\frac{e^{2z}(2z^4-z^2+z+1)-\left(3z^2+3z+1\right)}{\left(z^2+z\right)^3}\Bigg\|=$$

$$=2\,\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{e^{2z}\left(2z^4-z^2+z+1\right)-3z^2-3z-1}{\left(z^2+z\right)^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{2e^{2z}\left(2z^4-z^2+z+1\right)+e^{2z}\left(8z^3-2z+1\right)-6z-3}{3\left(z^2+z\right)^2\cdot\left(2z+1\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{e^{2z}\left(4z^4-2z^2+\cancel{2z}+2+8z^3-\cancel{2z}+1\right)-6z-3}{3\left(z^2+z\right)^2}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{e^{2z}\left(4z^4+8z^3-2z^2+3\right)-6z-3}{3\left(z^2+z\right)^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}\left(4z^4+8z^3-2z^2+3\right)+e^{2z}\left(16z^3+24z^2-4z\right)-6}{2\cdot 3\left(z^2+z\right)\left(2z+1\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}\left(8z^4+16z^3-4z^2+6+16z^3+24z^2-4z\right)-6}{6\left(z^2+z\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}\left(8z^4+32z^3+20z^2-4z+6\right)-6}{6\left(z^2+z\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}\left(8z^4+32z^3+20z^2-4z+6\right)+e^{2z}\left(32z^3+96z^2+40z-4\right)}{6\left(2z+1\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot 6+1\cdot\left(-4\right)}{6\cdot 1}=\frac{12-4}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Розглянемо $z_2=-1$:

$$\lim_{z\to -1}\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}=\left\|\frac{e^{-2}-1}{-1+1}=\frac{e^{-2}-1}{0}\right\|=\infty\Rightarrow z_2=-1 \text{ – полюс.}$$

Визначимо порядок полюса:

$$\lim_{z\to -1}\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}\cdot\left(z+1\right)^k=\lim_{z\to -1}\frac{e^{2z}-1}{z^4\cdot\left(z+1\right)}\cdot\left(z+1\right)^k=\left\|\text{при } k=1\right\|=$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{e^{2z}-1}{z^4}=\left\|\frac{e^{-2}-1}{\left(-1\right)^4}=\frac{e^{-2}-1}{1}\right\|=\frac{1}{e^2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}.$$

Таким чином, $z_2=-1$ – простий полюс функції.

Отже, $$\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{e^{2z}-1}{z^5+z^4}=\frac{1-e^2}{e^2}.$$

§20. Теорема Коші про лишки

Розглянемо застосування введених понять.

Теорема 20.1 (теорема Коші про лишки). Якщо функція $f(z)$ є аналітичною всюди в області $\bar{E}$ (включаючи її межу C), окрім скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, ..z_n$, які лежать всередині області $\bar{E}$, то

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) . \qquad (20.1)$$

Іншими словами, інтеграл по замкненому контуру C дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків підінтегральної функції $f(z)$ в її особливих точках, які знаходяться всередині області $\bar{E}$.

***Приклад* 20.1.** Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz$.

***Розв'язання*.**

Особливі точки функції $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z+1)}$ – це точки $z_1 = 0$ і

$$z_2 = -1 \quad \left(z^3(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^3 = 0, \\ z+1 = 0, \end{cases} \Rightarrow z = 0,\ z = -1 \right).$$

Контур інтегрування $C: |z| = 2$ являє собою коло радіуса $R = 2$ з центром в точці $z_0 = 0$ (рис. 20.1).

Обидві точки, z_1 і z_2, належать області, обмеженій контуром C.

Отже, за теоремою 20.1, шуканий інтеграл дорівнює:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{e^z}{z^3(z+1)} \right). \tag{20.2}$$

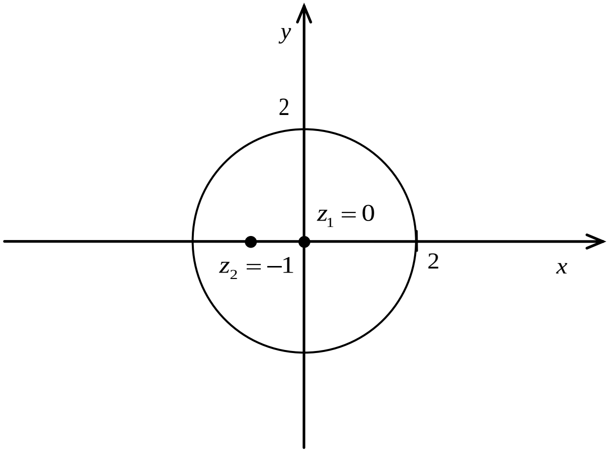

Рисунок 20.1

Знайдемо лишки в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = -1$, попередньо дослідивши характер цих особливих точок:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z^3(z+1)} = \left\| \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0} \right\| = \infty \Rightarrow z = 0 \text{ – полюс функції.}$$

Визначимо порядок полюса:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z^3(z+1)} \cdot z^k = \|\text{при } k = 3\| = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z+1} = 1 .$$

Таким чином, $z = 0$ – полюс 3-го порядку. Застосуємо формулу (19.10) для знаходження лишка:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3(z+1)} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z^3(z+1)} \cdot z^3 \right) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z+1} \right) =$$

$$= \left\| \left(\frac{e^z}{z+1} \right)^{(1)} = \frac{e^z(z+1) - 1 \cdot e^z}{(z+1)^2} = \frac{e^z(z+1-1)}{(z+1)^2} = \frac{z \cdot e^z}{(z+1)^2} \right.$$

$$\left(\frac{e^z}{z+1} \right)^{(2)} = e^z \frac{z}{(z+1)^2} + e^z \frac{1 \cdot (z+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+1)}z}{(z+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{e^z \cdot z}{(z+1)^2} + e^z \frac{z+1-2z}{(z+1)^3} =$$

$$\left. = e^z \left(\frac{z}{(z+1)^2} + \frac{1-z}{(z+1)^3} \right) = e^z \frac{z(z+1)+1-z}{(z+1)^3} = e^z \frac{z^2+1}{(z+1)^3} \right\| =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{2} \cdot e^z \frac{z^2+1}{(z+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot e^0 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

Для точки $z_2 = -1$ маємо:

$$\lim_{z \to -1} \frac{e^z}{z^3 \cdot (z+1)} = \left| \frac{e^{-1}}{0} \right| = \infty \Rightarrow z = -1 \text{ – полюс функції.}$$

Визначимо порядок полюса:

$$\lim_{z \to -1} \frac{e^z}{z^3 (z+1)} \cdot (z+1)^k = \| \text{при } k = 1 \| = \lim_{z \to -1} \frac{e^z}{z^3} = \frac{e^{-1}}{(-1)^3} = -\frac{1}{e} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = -1$ – простий полюс функції.

Враховуючи формулу (19.6), маємо:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3(z+1)} = -\frac{1}{e}.$$

Підставимо отримані лишки в вираз (20.2) і отримаємо остаточний результат:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) = 2\pi i \frac{e-2}{2e} = \frac{(e-2)\pi}{e} i.$$

***Приклад* 20.2.** Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z} dz$.

***Розв'язання*.**

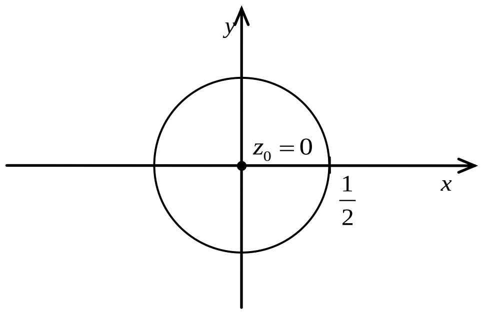

Рисунок 20.2

Єдина особлива точка функції $f(z) = z^2 \cdot \sin\frac{1}{z}$ – це точка $z_0 = 0$. Вона потрапляє всередину контура $|z| = \frac{1}{2}$, який є колом з центром в точці $z_0 = 0$ і радіусом $R = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right)$. Оскільки не існує границі $\lim\limits_{z \to 0} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z}$, то $z_0 = 0$ є істотно особливою точкою.

Знайдемо лишок підінтегральної функції в цій точці розкладанням її в ряд Лорана по степенях z. Використовуючи розклад (16.12), маємо:

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{z}\right)^7 + \dots \right) =$$

$$= z - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots \Rightarrow C_{-1} = -\frac{1}{6}.$$

З формули (19.3) маємо:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z} = -\frac{1}{6}.$$

Тоді

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

***Приклад* 20.3.** Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz$.

***Розв'язання*.**

Контур інтегрування є колом з центром в точці $z_0 = i$ і радіусом $R = 1\left(x^2 + (y-1)^2 = 1\right)$.

Знайдемо особливі точки підінтегральної функції $f(z) = \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1}$:

$z^4 + 2z^2 + 1 = 0$; $z^2 = t \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0$;

$(t+1)^2 = 0$; $t = -1 \Rightarrow z^2 = -1$;

$z_1 = i$, $z_2 = -i$ (рис. 20.3).

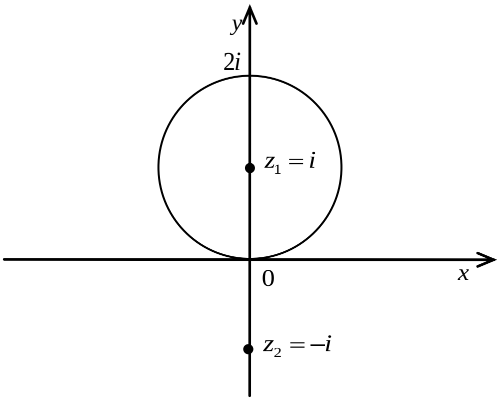

Рисунок 20.3

Точка $z_1 = -i$ не потрапляє в контур. Тоді за теоремою Коші (20.1) про лишки маємо:

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}. \qquad (20.3)$$

Визначимо характер ізольованої особливої точки $z_1 = i$ і знайдемо лишок в ній.

$$\lim_{z\to i}\frac{e^z}{z^4+2z^2+1} = \left\| \frac{e^i}{i^4+2i^2+1} = \frac{e^i}{0} \right\| = \infty \Rightarrow z = i \text{ – полюс.}$$

$$\lim_{z\to i}\frac{e^z\left(z-i\right)^k}{z^4+2z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{e^z}{\left(z+i\right)^2\left(z-i\right)^2}\left(z-i\right)^k = \left\|\text{при } k=2\right\| =$$

$$\lim_{z\to i}\frac{e^z}{\left(z+i\right)^2} = \frac{e^i}{\left(2i\right)^2} = \frac{\cos 1 + i\sin 1}{-4} = -\frac{\cos 1}{4} - i\frac{\sin 1}{4}.$$

Отже, $z_1 = i$ – полюс 2-го порядку $(k=2)$. Тоді за формулою (19.10):

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^z}{z^4+2z^2+1} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z^4+2z^2+1}\cdot\left(z-i\right)^2\right] =$$

$$= \left\| \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}\cdot\left(z-i\right)^2 = \frac{e^z}{\left(z+i\right)^2\cancel{\left(z-1\right)^2}}\cdot\cancel{\left(z-1\right)^2} = \frac{e^z}{\left(z+i\right)^2}\right.$$

$$\left.\left(\frac{e^z}{\left(z+i\right)^2}\right)^{(1)} = \frac{e^z\left(z+i\right)^{\cancel{2}} - 2\cancel{\left(z+i\right)}e^z}{\left(z+i\right)^{\cancel{4}\,3}} = e^z\,\frac{z+i-2}{\left(z+i\right)^3}\right\| =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{e^z\left(z+i-2\right)}{\left(z+i\right)^3} = \frac{e^i\left(2i-2\right)}{\left(2i\right)^3} = \frac{\left(\cos 1 + i\sin 1\right)\left(2i-2\right)}{-8i} =$$

$$= -\frac{1}{4i}(\cos 1 + i\sin 1)(i-1) = -\frac{1}{4i}(i\cos 1 - \sin 1 - \cos 1 - i\sin 1) =$$

$$= -\frac{1}{4i}(-\sin 1 - \cos 1 - i(\sin 1 - \cos 1)) = \frac{i^2}{4i}(-(\sin 1 + \cos 1) - i(\sin 1 - \cos 1)) =$$

$$= \frac{i}{4}\left(-\sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - i\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Підставимо отриманий лишок в вираз (20.3) і отримаємо остаточний результат:

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz = \cancel{2}\pi i\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}_2}\left(\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + i\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$= -\frac{1}{4i}(-\sin 1 - \cos 1 - i(\sin 1 - \cos 1)) = \frac{i^2}{4i}(-(\sin 1 + \cos 1) - i(\sin 1 - \cos 1)) =$$

$$= \frac{i}{4}\left(-\sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - i\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Підставимо отриманий лишок в вираз (20.3) і отримаємо остаточний результат:

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz = \cancel{2}\pi i\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}_2}\left(\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + i\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

ГЛАВА 2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

§1. Перетворення Лапласа

Методи операційного числення є своєрідними методами розв'язання різних математичних задач. Найбільш широко вони використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь. В основі операційного числення лежить ідея інтегральних перетворень, пов'язана з зіставленням розв'язку початкової задачі для функції $f(t)$ дійсного аргумента t деякої функції $F(p)$ комплексного аргумента p. У випадку диференціальних рівнянь, таким чином, звичайне диференціальне рівняння для функції $f(t)$ переходить в алгебраїчне рівняння для функції $F(p)$.

Розглянемо функцію $f(t)$, визначену для всіх значень дійсної змінної t $(-\infty < t < +\infty)$. Накладемо на цю функцію наступні умови:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (1.1)

2. $f(t)$ має не більше, ніж скінченну кількість точок розриву при $t \ge 0$; (1.2)

3. існують такі числа $M > 0$ і $S_0 \ge 0$, що для всіх $t \ge 0$ виповнюється умова $\left|f(t)\right| < Me^{S_0 t}$. (1.3)

Число S_0 в умові (1.3) називається показником росту функції $f(t)$. Це означає, що функція $f(t)$ за абсолютною величиною не може зростати швидше за деяку наперед задану показникову функцію.

Означення 1.1. Функція, яка задовольняє умови (1.1) − (1.3) називається оригіналом.

Означення 1.1 відповідає багатьом функціям, які описують реальні фізичні процеси. Умова (1.1) показує, що процес повинен мати початок відліку часу. Умови (1.2) і (1.3) пов'язані з існуванням інтегрального перетворення Лапласа.

Означення 2.1. Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ дійсного аргумента t називається перетворення, що ставить даній функції у відповідність функцію $F(p)$ комплексного аргумента p, яка визначається за допомогою інтеграла

$$F(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.4}$$

Оскільки інтеграл (1.4) є невласним, то необхідно розглянути питання про його збіжність.

Теорема 1.1. Інтеграл Лапласа (1.4) збігається в області $\operatorname{Re} p > S_0$, де S_0 – показник росту функції $f(t)$.

Означення 1.3. Функцію $F(p)$, яку отримано з функції $f(t)$ за допомогою перетворення Лапласа (1.4), називають зображенням функції $f(t)$.

Символічно дана операція записується наступним чином:

$$f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- F(p). \tag{1.5}$$

Отже, функція $F(p)$ визначена у напівплощині $\operatorname{Re} p = S > S_0$ і є в цій напівплощині аналітичною функцією. Крім того, є справедливою теорема про єдиність зображення.

Теорема 1.2. Будь-якому оригіналу відповідає єдине зображення.

З цієї теореми випливає, що, знаючи зображення, можна однозначно відновити оригінал.

§2. Зображення основних елементарних функцій

1. Найпростішою функцією-оригіналом є так звана одинична функція Хевісайда:

$$\sigma(t)=\begin{cases}1, \ t>0;\\ 0, \ t\le 0.\end{cases} \qquad (2.1)$$

Знайдемо зображення цієї функції:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot 1dt=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-pt}\cdot 1dt=-\frac{1}{p}\lim_{A\to+\infty} e^{-pt}\Big|_0^A=$$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{A\to+\infty} e^{-pA}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p} \ \text{(при } \operatorname{Re} p>0\text{)}.$$

Таким чином:

$$\sigma(t)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}}\frac{1}{p}. \qquad (2.2)$$

2. Знайдемо зображення функції $f(t)=e^t$. Використовуючи означення (1.4), маємо:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot e^t dt=\int_0^{+\infty} e^{(1-p)t}dt=\frac{1}{1-p}\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{(1-p)t}d(1-p)t=$$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{A\to+\infty} e^{(1-p)t}\Big|_0^A=\frac{1}{1-p}\lim_{A\to+\infty} e^{(1-p)A}-\frac{1}{1-p}=\left\|\text{при } \operatorname{Re} p>1\right\|=\frac{1}{1-p}.$$

Таким чином, при $\operatorname{Re} p>1$

$$e^t\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}}\frac{1}{1-p}. \qquad (2.3)$$

3. Для знаходження зображення функції $f(t)=\sin t$ подамо її у вигляді $\sin t=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$. Тоді:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\left[e^{(i-p)t}-e^{-(i+p)t}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{(i-p)t}}{i-p}-\frac{e^{-(i+p)t}}{-(i+p)}\right)\Bigg|_0^A=\frac{1}{2i}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{(i-p)A}}{i-p}+\frac{e^{-(i+p)A}}{i+p}\right)-$$

$$-\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-p}+\frac{1}{i+p}\right)=\left\|\text{при}\operatorname{Re}p>0\right\|=-\frac{1}{2i}\frac{i+p+i-p}{-1-p^2}=\frac{1}{p^2+1}.$$

Отже, при $\operatorname{Re}p>0$:

$$\sin t\leftarrow\!\!\div\,\frac{1}{p^2+1}. \tag{2.4}$$

4. Аналогічно знайдемо зображення функції $f(t)=\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\left[e^{(i-p)t}+e^{-(i+p)t}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{(i-p)t}}{i-p}-\frac{e^{-(i+p)t}}{i+p}\right)\Bigg|_0^A=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{(i-p)A}}{i-p}-\frac{e^{-(i+p)A}}{i+p}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-p}-\frac{1}{i+p}\right)=\left\|\text{при}\operatorname{Re}p>0\right\|=-\frac{1}{2}\frac{i+p-i+p}{(i-p)(i+p)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{-1-p^2}=\frac{p}{p^2+1}.$$

Отже, при $\operatorname{Re}p>0$:

$$\cos t\leftarrow\!\!\div\,\frac{p}{p^2+1}. \tag{2.5}$$

4. Знайдемо зображення для гіперболічного синуса

$$f(t)=\operatorname{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

З означення (1.4) маємо:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{(1-p)t}-e^{-(1+p)t}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\left[e^{(1-p)t}-e^{-(1+p)t}\right]dt=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{(1-p)t}}{1-p}+\frac{e^{-(1+p)t}}{1+p}\right)\Bigg|_0^A=$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{e^{(1-p)A}}{1-p} + \frac{e^{-(1+p)A}}{1+p} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1+p} \right) = \left\| \text{при} \operatorname{Re} p > 1 \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1+p+1-p}{(1-p)(1+p)} = \frac{1}{p^2-1} .$$

Остаточно маємо, що при $\operatorname{Re} p > 1$:

$$\operatorname{sh} t \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p^2-1} . \tag{2.6}$$

6. Не важко показати, що для гіперболічного косинуса $f(t) = \operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, аналогічно попередньому, при $\operatorname{Re} p > 1$ отримаємо:

$$\operatorname{ch} t \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- \frac{p}{p^2-1} . \tag{2.7}$$

7. Зображення степеневої функції $f(t) = t^n \quad (n \in \mathbb{N})$ за означенням (1.4):

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}} .$$

Цей результат не важко отримати , інтегруючи n разів вказаний інтеграл частинами при $\operatorname{Re} p > 0$. Таким чином:

$$t^n \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- \frac{n!}{p^{n+1}} . \tag{2.8}$$

§3. Властивості перетворення Лапласа

1°. Властивість лінійності.

Теорема 3.1. Нехай $f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- F(p)$, $g(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- G(p)$. Тоді для будь-яких комплексних сталих α і β є справедливим вираз:

$$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \alpha \cdot F(p) + \beta \cdot G(p). \qquad (3.1)$$

***Приклад* 3.1.** Знайти зображення функції $f(t) = 1 + t$.

Розв'язання.

Подамо початкову функцію у вигляді: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, де $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$. З формул (2.2) і (2.8) маємо:

$$1 = \sigma(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p},$$

$$t = t^1 \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1!}{p^{1+1}} = \frac{1}{p^2}.$$

За формулою (3.1.):

$$1 + t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{p+1}{p^2}.$$

Таким чином:

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2}.$$

***Приклад* 3.2.** Знайти зображення функції $f(t) = 2\sin t - \cos t$.

Розв'язання.

Подамо початкову функцію у вигляді $f(t) = 2 f_1(t) - f_2(t)$, де $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \cos t$. З формул (2.4) і (2.5) маємо:

$$\sin t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p^2+1}; \ \cos t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{p}{p^2+1}.$$

За формулою (3.1) знайдемо зображення початкової функції:

$$F(p) = 2 \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{2-p}{p^2+1}.$$

2°. Теорема 3.2 (теорема подібності). Нехай оригінал $f(t)$ має своїм зображенням функцію $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\div\!\!- F(p)\right)$. Тоді для будь-якого сталого $\alpha > 0$

$$f(\alpha \cdot t) \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{3.2}$$

З даної теореми випливає, що множення оригінала на додатне число призводить до ділення на це число зображення і його аргумента. Використовуючи дану теорему, легко отримати такі зображення, як:

$$e^{\alpha t} \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{p}{\alpha} - 1} = \frac{1}{p - \alpha}, \tag{3.3}$$

$$\sin \alpha t \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + p^2}, \tag{3.4}$$

$$\cos \alpha t \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{1}{\alpha} \frac{p/\alpha}{1 + \left(\frac{p}{\alpha}\right)^2} = \frac{p}{\alpha^2 + p^2}, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{sh} \alpha t \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 - 1} = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{ch} \alpha t \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{1}{\alpha} \frac{p/\alpha}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}. \tag{3.7}$$

***Приклад* 3.3.** Використовуючи теорему подібності, знайти зображення наступної функції $f\left(t\right)=\sin^2 t$.

Розв'язання.

Перетворимо функцію $\sin^2 t$, використовуючи формулу подвійного аргумента:

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t .$$

За формулою (3.5) маємо:

$$\cos 2t \leftarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\vdots\;\;\; \frac{p}{p^2+4} .$$

Використовуючи властивість лінійності зображення (3.1), отримаємо шуканий вираз:

$$\sin^2 t \leftarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\vdots\;\;\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+4-p^2}{\left(p^2+4\right)p}=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)} .$$

***Приклад* 3.4.** Використовуючи теорему подібності, знайти зображення наступної функції $f\left(t\right)=7\sin 7t\cdot\cos 3t+3$.

Розв'язання.

Перетворимо добуток тригонометричних функцій у суму:

$$\sin 7t\cdot\cos 3t=\frac{1}{2}\left(\sin\left(7t+3t\right)+\sin\left(7t-3t\right)\right)=\frac{1}{2}\sin 10t+\frac{1}{2}\sin 4t .$$

Тоді початковий оригінал приймає вигляд:

$$f\left(t\right)=\frac{7}{2}\sin 10t+\frac{7}{2}\sin 4t+3 .$$

З формул (2.2), (3.4) і властивості лінійності отримаємо:

$$7\sin 7t\cdot\cos 3t+3 \risingdotseq \frac{7}{2}\cdot\frac{10}{10^2+p^2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{4^2+p^2}+3\cdot\frac{1}{p}=$$

$$=\frac{35}{p^2+100}+\frac{14}{p^2+16}+\frac{3}{p}=$$

$$=\frac{35\left(p^3+16p\right)+14\left(p^3+100p\right)+3\left(p^2+100\right)\left(p^2+16\right)}{p\left(p^2+16\right)\left(p^2+100\right)}=$$

$$=\frac{3p^4+49p^3+348p^2+1960p+4800}{p\left(p^2+16\right)\left(p^2+100\right)}.$$

***Приклад* 3.5.** Використовуючи теорему подібності, знайти зображення наступної функції $f\left(t\right)=2+4\cos\left(2t+3\right)$.

Розв'язання.

Перетворимо початкову функцію:

$$2+4\cos\left(2t+3\right)=2+4\left(\cos 2t\cdot\cos 3-\sin 2t\cdot\sin 3\right)=$$

$$=2+4\cos 3\cdot\cos 2t-4\sin 3\cdot\sin 2t\ .$$

За формулами (3.4) і (3.5) маємо:

$$\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}\ ;\ \sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}\ .$$

Формула (3.1) дає зображення для початкового оригінала:

$$2+4\cos\left(2t+3\right) \risingdotseq \frac{2}{p}+4\cos 3\cdot\frac{p}{p^2+4}-4\sin 3\cdot\frac{2}{p^2+4}=$$

$$=\frac{2}{p}+\frac{4\left(p\cdot\cos 3-2\cdot\sin 3\right)}{p^2+4}=\frac{2p^2+8+4p\left(p\cdot\cos 3-2\cdot\sin 3\right)}{p^2+4}.$$

3°. Теорема 3.3 (теорема про диференціювання оригінала). Нехай функції $f(t)$; $f^{(1)}(t)$; $f^{(2)}(t)$; …; $f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами і $f(t) \leftarrow\!\!\div\!\!- F(p)$, тоді:

$$f'(t) \leftarrow\!\!\div\!\!- p \cdot F(p) - f(0), \qquad (3.8)$$

$$f''(t) \leftarrow\!\!\div\!\!- p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \qquad (3.9)$$

…………………………………………………………………

$$f^{(n)}(t) \leftarrow\!\!\div\!\!- p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f^{(1)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \qquad (3.10)$$

де під $f^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ розуміється $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

Приклад **3.6.** Використовуючи теорему про диференціювання оригінала, знайти зображення функції $f(t) = \sin^2 t$.

Розв'язання.

Якщо за теоремою про диференціювання оригінала

$$\sin^2 t \leftarrow\!\!\div\!\!- F(p),$$

то за формулою (3.8):

$$\left(\sin^2 t\right)' \leftarrow\!\!\div\!\!- p \cdot F(p) - \sin^2 0,$$

$$2 \cdot \sin t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\div\!\!- p \cdot F(p),$$

$$\sin 2t \leftarrow\!\!\div\!\!- p \cdot F(p). \qquad (3.11)$$

За формулою (3.4):

$$\sin 2t \leftarrow\!\!\div\!\!- \frac{2}{p^2 + 4}. \qquad (3.12)$$

А з теореми 1.2 про єдиність зображення вирази (3.11) і (3.12) є рівними, тобто:

$$p \cdot F(p) = \frac{2}{p^2 + 4},$$

$$F(p)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Таким чином,

$$\sin^2 t \leftarrow\!\!\!\div\, \frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Результат тотожно дорівнює результату приклада 3.1, який використовує теорему про подібність.

***Приклад* 3.7.** Використовуючи теорему про диференціювання оригінала, знайти зображення функції $f(t)=t\cdot\cos t$.

Розв'язання.

Нехай

$$t\cdot\cos 3t \leftarrow\!\!\!\div\, F(p), \tag{3.13}$$

$$\left(t\cdot\cos 3t\right)' = \cos 3t-3t\cdot\sin 3t\ ,$$

$$\left(t\cdot\cos 3t\right)'' = -3\cdot\sin 3t-3\cdot\sin 3t-9t\cdot\cos 3t=-6\cdot\sin 3t-9t\cdot\cos 3t\ .$$

За формулою (3.9) маємо:

$$\left(t\cdot\cos 3t\right)'' \leftarrow\!\!\!\div\, p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0),$$

$$f(0)=t\cdot\cos 3t\big|_{t=0}=0,$$

$$f'(0)=\left(\cos 3t-3t\cdot\sin 3t\right)\big|_{t=0}=1.$$

Тоді

$$\left(t\cdot\cos 3t\right)'' \leftarrow\!\!\!\div\, p^2\cdot F(p)-1. \tag{3.14}$$

Формула (3.4) дає зображення функції $\sin 3t$:

$$\sin 3t \leftarrow\!\!\!\div\, \frac{3}{p^2+9}. \tag{3.15}$$

Враховуючи властивість лінійності і припускання (3.13), знайдемо зображення для оригінала $(t\cdot\cos 3t)''$:

$$(t\cdot\cos 3t)'' = -6\cdot\sin 3t - 9t\cdot\cos 3t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- -6\cdot\frac{3}{p^2+9} - 9\cdot F(p) =$$

$$= -\frac{18}{p^2+9} - 9\cdot F(p). \qquad (3.16)$$

Використовуючи теорему 1.2 про єдиність зображення, прирівняємо зображення (3.14) і (3.16):

$$p^2\cdot F(p) - 1 = -\frac{18}{p^2+9} - 9\cdot F(p). \qquad (3.17)$$

З рівності виразимо $F(p)$:

$$p^2\cdot F(p) + 9\cdot F(p) = 1 - \frac{18}{p^2+9},$$

$$F(p)\left(p^2+9\right) = \frac{p^2+9-18}{p^2+9}.$$

Шукане зображення для $f(t) = t\cdot\cos 3t$:

$$F(p) = \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}.$$

4°. Теорема 3.4 (теорема про диференціювання зображення). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- F(p)\right)$. Тоді

$$-t\cdot f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- F'(p). \qquad (3.18)$$

Диференціювання зображення зводиться до множення оригінала на $(-t)$.

Застосовуючи операцію диференціювання зображення багаторазово, отримаємо:

$$(-t)^n \cdot f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- F^{(n)}(p), \tag{3.19}$$

або, враховуючи властивість лінійності:

$$t^n \cdot f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- (-1)^n F^{(n)}(p). \tag{3.20}$$

***Приклад* 3.8.** Знайти зображення наступної функції, використовуючи властивість диференціювання зображення $f(t) = t^3 \cdot e^{4t}$.

Розв'язання.

За формулою (3.3) обчислимо зображення для функції e^{4t}:

$$e^{4t} \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p-4} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p-4}.$$

Оскільки e^{4t} множиться на t^3, то застосуємо формулу (3.20):

$$t^3 \cdot e^{4t} \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- (-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{p-4}\right)^{(3)}.$$

Обчислимо $\left(\dfrac{1}{p-4}\right)^{(3)}$:

$$\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(1)} = (-1)\cdot(p-4)^{-2},$$

$$\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(2)} = (-1)\cdot(-2)\cdot(p-4)^{-3} = 2\cdot(p-4)^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(3)} = 2(-3)\cdot(p-4)^{-4} = -\frac{6}{(p-4)^4}.$$

Остаточно маємо:

$$t^3 \cdot e^{4t} \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- (-1)^3 \cdot \frac{-6}{(p-4)^4} = \frac{6}{(p-4)^4}.$$

***Приклад* 3.9.** Знайти зображення наступної функції, використовуючи властивість диференціювання зображення $f(t) = t^2 \cdot \sin 3t$.

Розв'язання.

Запишемо за формулою (3.4) зображення функції $\sin 3t$:

$$\sin 3t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{3}{p^2+9}.$$

Множник t^2 $(n=2)$ говорить про необхідність знаходження похідної другого порядку від зображення $\frac{3}{p^2+9}$, оскільки за формулою (3.20):

$$t^2 \cdot \sin 3t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- (-1)^2 \left(\frac{3}{p^2+9} \right)^{(2)} = \left(\frac{3}{p^2+9} \right)^{(2)}.$$

Знайдемо цю похідну:

$$\left(\frac{3}{p^2+9} \right)^{(1)} == -\frac{3 \cdot 2p}{\left(p^2+9\right)^2} = -\frac{6p}{\left(p^2+9\right)^2}$$

$$\left(\frac{3}{p^2+9} \right)^{(2)} == -6 \cdot \frac{1 \cdot \left(p^2+9\right)^2 - 2 \cdot \left(p^2+9\right) \cdot 2p \cdot p}{\left(p^2+9\right)^4} = -6 \cdot \frac{9-3p^2}{\left(p^2+9\right)^3} =$$

$$= \frac{18p^2-54}{\left(p^2+9\right)^3}.$$

Отже:

$$t^2 \cdot \sin 3t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{18p^2-54}{\left(p^2+9\right)^3}.$$

5°. Теорема 3.5 (теорема про інтегрування зображення). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\!\doteq\!\!\!- F(p)\right)$, тоді, якщо невласний інтеграл $\int\limits_p^{+\infty} F(p)\,dp$ збігається, то він служить зображенням функції $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow\!\!\!\doteq\!\!\!- \int\limits_p^{+\infty} F(p)\,dp\,. \qquad (3.21)$$

***Приклад* 3.10.** Використовуючи теорему про інтегрування зображення, знайти зображення наступної функції $f(t) = \dfrac{\sin 4t \cdot \sin 10t}{t}$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $g(t) = \sin 4t \cdot \sin 10t$:

$$\sin 4t \cdot \sin 10t = \frac{1}{2}\left[\cos(4t - 10t) - \cos(4t + 10t)\right] = \frac{1}{2}\cos 6t - \frac{1}{2}\cos 14t\,.$$

З властивості лінійності і формули (3.5) маємо:

$$\sin 4t \cdot \sin 10t \leftarrow\!\!\!\doteq\!\!\!- \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 36} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 196}\,. \qquad (3.22)$$

Оскільки $f(t) = \dfrac{g(t)}{t}$, то за теоремою 3.5:

$$f(t) \leftarrow\!\!\!\doteq\!\!\!- \int\limits_p^{+\infty} G(p)\,dp\,, \text{ де } g(t) \leftarrow\!\!\!\doteq\!\!\!- G(p)\,.$$

З формули (3.22):

$$G(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 36} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 196}\,.$$

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+196}\right)dp=\lim_{A\to+\infty}\int_p^{A}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+196}\right)dp=$$

$$=\left\|\begin{matrix} d\left(p^2+36\right)=2pdp\Rightarrow pdp=\dfrac{1}{2}d\left(p^2+36\right) \\ d\left(p^2+196\right)=2pdp\Rightarrow pdp=\dfrac{1}{2}d\left(p^2+196\right)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\left(\int_p^A\frac{d\left(p^2+36\right)}{p^2+36}dp-\int_p^A\frac{d\left(p^2+196\right)}{p^2+196}dp\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|p^2+36\right|\Big\|_p^A-\ln\left|p^2+196\right|\Big\|_p^A\right)=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{p^2+36}{p^2+196}\right|\Bigg\|_p^A=$$

$$=\left\|\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A^2+36}{A^2+196}\right|=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A^2}{A^2}=\ln 1=0\right\|=-\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+36}{p^2+196}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+196}{p^2+36}.$$

Отже:

$$\frac{\sin 4t\cdot\sin 10t}{t}\;\leftarrow\!\!\!\!\div\;\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+196}{p^2+36}.$$

Приклад **3.11.** Використовуючи теорему про інтегрування зображення , знайти зображення наступної функції $f\left(t\right)=\dfrac{1-e^{-7t}}{t}$.

Розв'язання.

У даному випадку $f\left(t\right)=\dfrac{g\left(t\right)}{t}$, де $g\left(t\right)=1-e^{-7t}$.

З властивості лінійності та формули (3.3) маємо:

$$1-e^{-7t}\;\leftarrow\!\!\!\!\div\;\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}.$$

Отже, зображення $G(p)$ функції $g(t)$ має вигляд:

$$G(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}.$$

За теоремою про інтегрування зображення (3.21):

$$f(t)=\frac{g(t)}{t}\leftarrow\!\!\div\!\!- \int_p^{+\infty}G(p)\,dp.$$

Обчислимо невласний інтеграл $\int_p^{+\infty}G(p)\,dp$:

$$\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}\right)dp=\lim_{A\to+\infty}\int_p^{A}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}\right)dp=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_p^{A}\frac{dp}{p}-\int_p^{A}\frac{dp}{p+7}\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln|p|\Big|_p^A-\ln|p+7|\Big|_p^A\right)=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{p}{p+7}\right|\Bigg|_p^A=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A}{A+7}\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{p}{p+7}\right|=\left\|\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A}{A+7}\right|=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A}{A}\right|=\ln 1=0\right\|=-\ln\left|\frac{p}{p+7}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{p+7}{p}\right|.$$

Остаточно маємо:

$$1-e^{-7t}\leftarrow\!\!\div\!\!-\ln\left|\frac{p+7}{p}\right|.$$

6°. Теорема 3.6 (теорема про інтегрування оригінала). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$, тоді:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau\leftarrow\!\!\div\!\!-\frac{F(p)}{p}. \tag{3.23}$$

Таким чином, інтегрування оригінала зводиться до ділення зображення на p.

Приклад **3.12.** Використовуючи теорему про інтегрування оригінала, знайти зображення наступної функції $f(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot\operatorname{sh}2\tau d\tau$.

Розв'язання.

Функція $g(t)=\tau\cdot\operatorname{sh}2\tau$ є оригіналом і задовольняє теорему 3.6. Нехай $G(p)$ – зображення функції $g(t)$. Тоді за формулою (3.23):

$$f(t)\leftarrow\!\div\!\!-\frac{G(p)}{p}.$$

Знайдемо зображення оригінала $g(t)$. Оскільки за формулою (3.6):

$$\operatorname{sh}2t\leftarrow\!\div\!\!-\frac{2}{p^2-4},$$

то за теоремою 3.4 про диференціювання зображення (3.20):

$$t\cdot\operatorname{sh}2t\leftarrow\!\div\!\!-(-1)^1\cdot\left(\frac{2}{p^2-4}\right)^{(1)},$$

$$\left(\frac{2}{p^2-4}\right)^{(1)}=-\frac{2}{\left(p^2-4\right)^2}\cdot 2p=-\frac{4p}{\left(p^2-4\right)^2}.$$

Отже:

$$t\cdot\operatorname{sh}2t\leftarrow\!\div\!\!-\frac{4p}{\left(p^2-4\right)^2}.$$

Остаточно маємо:

$$\int\limits_0^t \tau\cdot\operatorname{sh}2\tau d\tau\leftarrow\!\div\!\!-\frac{\frac{4p}{\left(p^2-4\right)^2}}{p}=\frac{4p}{p\left(p^2-4\right)^2}=\frac{4}{\left(p^2-4\right)^2}.$$

***Приклад* 3.13.** Використовуючи теорему про інтегрування оригінала, знайти зображення наступної функції $\int\limits_0^t \cos^2 5\tau d\tau$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція: $g(t) = \cos^2 5t$. Аналогічно попередньому прикладу, знайдемо зображення $\cos^2 5t$:

$$\cos^2 5t = \frac{1+\cos 10t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 10t,$$

$$\cos 10t \leftarrow\!\!\!\div \frac{p}{p^2+100},$$

$$\cos^2 5t \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+100} = \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+100+p^2}{p\left(p^2+100\right)} = \frac{p^2+50}{p\left(p^2+100\right)},$$

$$\int\limits_0^t \cos^2 5\tau d\tau \leftarrow\!\!\!\div \frac{\dfrac{p^2+50}{p\left(p^2+100\right)}}{p} = \frac{p^2+50}{p^2\left(p^2+100\right)}.$$

7°. Теорема 3.7 (теорема зсунення). Якщо функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p)\right)$, то для будь-якого комплексного p_0:

$$e^{p_0 t}\cdot f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p-p_0). \tag{3.24}$$

***Приклад* 3.14.** Знайти зображення наступної функції $f(t) = e^{-t}t^3$.

Розв'язання.

Функція t^3 має зображення за формулою (2.8):

$$t^3 \leftarrow\!\!\!\div \frac{3!}{p^{3+1}} = \frac{6}{p^4}.$$

За теоремою зсунення, враховуючи, що $p_0 = -1$, остаточно маємо:

$$e^{-t} \cdot t^3 \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{6}{(p+1)^4}.$$

***Приклад* 3.15.** Знайти зображення наступної функції

$$f(t) = t \cdot e^t \cdot \cos t.$$

Розв'язання.

Знайдемо зображення функції $t \cdot \cos t$. За формулою (2.5):

$$\cos t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{p}{p^2+1}.$$

За теоремою про диференціювання зображення (3.20):

$$t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- (-1)^1 \cdot \left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(1)} = -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(1)},$$

$$\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(1)} = \frac{1 \cdot (p^2+1) - 2p \cdot p}{(p^2+1)^2} = \frac{p^2+1-2p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Отже:

$$t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}. \qquad (3.25)$$

Застосуємо теорему зсунення (3.24), де $p_0 = 1$, і з виразу (3.25) остаточно отримаємо:

$$t \cdot e^t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{(p-1)^2-1}{\left((p-1)^2+1\right)^2} = \frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}.$$

8°. Теорема 3.8 (теорема запізнення). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\!\div\, F(p)\right)$. Розглянемо функцію $\varphi(t)$, визначену наступним чином:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \ t < t_0; \\ f(t - t_0), \ t \ge t_0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Графік функції $\varphi(t)$ отримується з графіка оригінала в результаті зсунення його праворуч вздовж осі OT на величину t_0 (рис.3.1). Отже, якщо $f(t)$ описує деякий процес, то $\varphi(t)$ описує той же процес, але з запізненням на t_0.

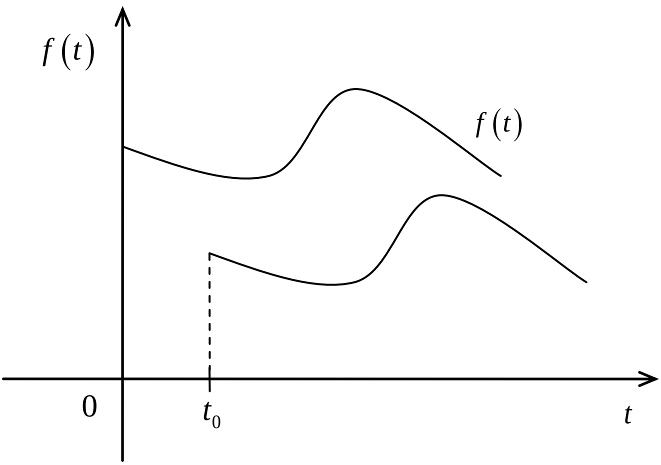

Рисунок 3.1

Теорема 3.9. Нехай $f(t) \leftarrow\!\!\!\div\, F(p)$, тоді для будь-якого додатного τ:

$$f(t-\tau)\sigma(t-\tau) \leftarrow\!\!\!\div\, e^{-p\tau_0} \cdot F(p). \tag{3.27}$$

***Приклад* 3.16.** Знайти зображення функції

$$f(t) = \sin(t-2)\sigma(t-2).$$

Розв'язання.

Оскільки за формулою (2.4)

$$\sin t \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p^2+1},$$

то за теоремою про запізнення сигнала (3.27), враховуючи, що $\tau = 2$, маємо:

$$\sin(t-2)\sigma(t-2) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{e^{-2p}}{p^2+1}.$$

***Приклад* 3.17.** Знайти зображення функції $f(t) = t^2 \cdot \sigma(t-1)$.

Розв'язання.

Оскільки маємо запізнення сигнала $(\tau = 1)$, то й оригінал повинен залежати від аргумента $(t-1)$. Отже, перетворимо функцію t^2 у функцію від аргумента $(t-1)$:

$$t^2 = (t-1+1)^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1.$$

Враховуючи формулу (2.8), для оригінала $t^2 + 2t + 1$ маємо зображення:

$$t^2 + 2t + 1 \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2 + 2p + p^2}{p^3}.$$

Застосуємо теорему про запізнении сигнала (3.27) і запишемо остаточний вигляд зображення :

$$t^2 \cdot \sigma(t-1) = \left[(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\right] \cdot \sigma(t-1) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- \frac{2 + 2p + p^2}{p^3} e^{-p}.$$

Якщо функція $f(t)$ при $t \ge 0$ є оригіналом (рис.3.2а),

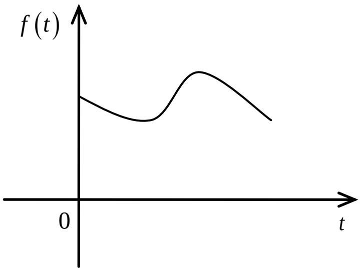

Рисунок 3.2а

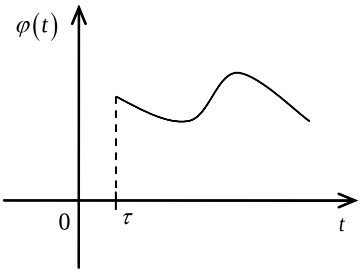

Рисунок 3.2б

то функція $\varphi(t)$ (при $t \ge \tau > 0$) отримується з графіка функції $f(t)$ зсуненням на величину τ :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ f(t-\tau), & t \ge \tau. \end{cases} \tag{3.28}$$

Тоді, за допомогою функції Хевісайда $\sigma(t)$, функцію $\varphi(t)$ можна перетворити наступним чином:

$$\varphi(t) = f(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) . \qquad (3.2$$

Тоді, якщо $f(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- F(p)$, то за теоремою запізнення:

$$\varphi(t) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- e^{-pt} F(p) . \tag{3.30}$$

Теорема запізнення дає можливість отримати зображення функцій, які описують імпульсні процеси.

Розглянемо зображення одиничного імпульса $\varphi(t)$, який діє на проміжку τ (рис.3.3).

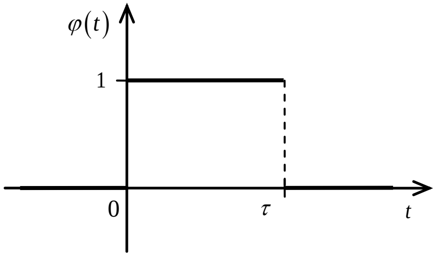

Рисунок 3.3

Аналітично одиничний імпульс можна зобразити як:

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & 0<t<\tau;\\ 0, & t>0.\end{cases} \tag{3.31}$$

За допомогою функції Хевісайда запишемо функцію $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\sigma(t)-\sigma(t-\tau). \tag{3.32}$$

Якщо одиничний імпульс $\varphi(t)$ починається при $t=T$ і діє в період часу τ (рис.3.4), то аналітично такий імпульс

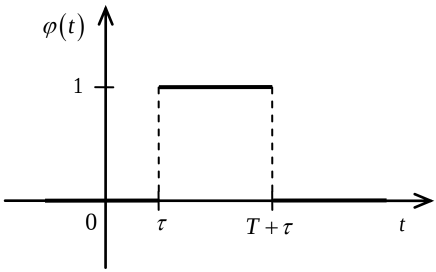

Рисунок 3.4

можна зобразити як:

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<T;\\ 1, & T<t<T+\tau;\\ 0, & t>T+\tau.\end{cases} \qquad (3.33)$$

Аналогічно виразам (3.32) маємо вираження імпульса (3.33) в наступному вигляді:

$$\varphi(t)=\sigma(t-T)-\sigma(t-T-\tau). \qquad (3.34)$$

Розглянемо загальний випадок:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<a_1;\\ f_1(t), & a_1<t<a_2;\\ f_2(t), & t>a_2,\end{cases} \qquad (3.35)$$

де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ – функції-оригінали.

Використовуючи вираз (3.35), можна записати оригінал $f(t)$ одним аналітичним виразом:

$$f(t)=f_1(t)\sigma(t-a_1)-f_1(t)\sigma(t-a_2)+f_2(t)\sigma(t-a_2). \qquad (3.36)$$

***Приклад* 3.18.** Знайти зображення функції

$$f(t)=\begin{cases}2t+1, & t\in(2;3);\\ 0, & t\notin(2;3).\end{cases}$$

Розв'язання.

Враховуючи вираз (3.36), запишемо аналітичний вираз для функції $f(t)$:

$$f(t)=(2t+1)\sigma(t-2)-(2t+1)\sigma(t-3). \qquad (3.37)$$

Подамо вираз $(2t+1)$ аргумента t у вигляді виразів аргументів $(t-2)$ і $(t-3)$, відповідно:

$$2t+1=2(t-2+2)+1=2(t-2)+5, \tag{3.38}$$

$$2t+1=2(t-3+3)+1=2(t-3)+7. \tag{3.39}$$

Враховуючи записи (3.38) і (3.39), отримаємо новий вираз для функції $f(t)$:

$$f(t)=2(t-2)\sigma(t-2)+5\sigma(t-2)+2(t-3)\sigma(t-3)+7\sigma(t-3). \tag{3.40}$$

Оскільки

$$t \leftarrow\!\!\!\!\!\!\div \frac{1}{p^2};\ 1 \leftarrow\!\!\!\!\!\!\div \frac{1}{p},$$

то, за теоремою про запізнення оригінала (3.27), остаточно маємо:

$$F(p)=\frac{2}{p^2}e^{-2p}+5\frac{1}{p}e^{-2p}+2\frac{1}{p^2}e^{-3p}+7\frac{1}{p}e^{-3p}=\frac{2+5p}{p^2}e^{-2p}+\frac{2+7p}{p^2}e^{-3p}.$$

***Приклад* 3.19.** За даним графіком оригінала знайти зображення.

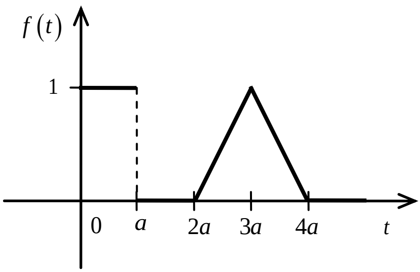

Рисунок 3.5

Розв'язання.

Подамо функцію, зображену на графіку (рис.3.5) аналітично:

при $0 < t < a \quad f_1(t) = 1$,

при $a < t < 2a \quad f_2(t) = 0$.

При $2a < t < 3a$ функцію зображено відрізком прямої, яка проходить через точки $M_1(2a;0)$ і $M_2(3a;1)$. Рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2, має вигляд:

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t) - f(t_1)}{f(t_2) - f(t_1)}. \tag{3.41}$$

В точках M_1 і M_2, враховуючи (3.41), маємо:

$$\frac{t - 2a}{3a - 2a} = \frac{f(t) - 0}{1 - 0};$$

$$\frac{t - 2a}{a} = f(t).$$

Отже, при $2a < t < 3a$:

$$f_3(t) = \frac{1}{a}(t - 2a).$$

При $3a < t < 4a$ функцію зображено відрізком прямої, яка проходить через точки $M_2(3a;1)$ і $M_3(4a;0)$. За формулою (3.41) складемо рівняння прямої M_2M_3:

$$\frac{t - 3a}{4a - 3a} = \frac{f(t) - 1}{0 - 1},$$

$$\frac{t - 3a}{a} = \frac{f(t) - 1}{-1},$$

$$f(t) = 1 - \frac{t - 3a}{a}.$$

Таким чином, при $3a < t < 4a$ функція-оригінал має вигляд: $f_4(t) = 1 - \dfrac{t-3a}{a} = \dfrac{4a-t}{a}$.

При $t > 4a$: $f_5(t) = 0$.

Остаточно отримаємо аналітичні вирази для оригінала:

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0; \\ 1, \ 0 < t < a; \\ 0, \ a < t < 2a; \\ \dfrac{1}{a}(t-2a), \ 2a < t < 3a; \\ \dfrac{4a-t}{a}, \ 3a < t < 4a; \\ 0, \ t > 4a. \end{cases}$$

Запишемо оригінал $f(t)$ одним аналітичним виразом за зразком (3.36):

$$f(t) = \sigma(t) - \sigma(t-a) + \frac{t-2a}{a}\sigma(t-2a) - \frac{t-2a}{a}\sigma(t-3a) +$$
$$+ \frac{4a-t}{a}\sigma(t-3a) - \frac{4a-t}{a}\sigma(t-4a). \qquad (3.42)$$

За теоремою запізнення (3.27) функція Хевісайда $\sigma(t-\tau)$ є множником, який говорить, що аргумент оригінала – це $(t-\tau)$. У відповідності з цим перетворимо оригінал (3.42):

$$f(t) = \sigma(t) - \sigma(t-a) + \frac{1}{a}(t-2a)\sigma(t-2a) -$$
$$- \frac{t-2a-4a+t}{a}\sigma(t-3a) + \frac{t-4a}{a}\sigma(t-4a) = \sigma(t) - \sigma(t-a) +$$
$$+ \frac{1}{a}(t-2a)\sigma(t-2a) - \frac{2}{a}(t-3a)\sigma(t-3a) + \frac{1}{a}(t-4a)\sigma(t-4a). \quad (3.43)$$

Оскільки

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2};\ 1 \risingdotseq \frac{1}{p},$$

то за теоремою запізнення остаточно отримаємо зображення для оригінала (3.43):

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ap} + \frac{e^{-2ap}}{ap^2} - \frac{2e^{-3ap}}{ap^2} + \frac{e^{-4ap}}{ap^2}.$$

9°. Теорема множення (теорема про згортку). Згорткою двох оригіналів $f_1(t)$ і $f_2(t)$, яка позначається $f_1(t) * f_2(t)$, називається інтеграл $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \qquad (3.44)$$

Якщо виконати заміну у виразі (3.44), то не важко показати, що:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \qquad (3.45)$$

Теорема 3.10. Нехай оригінали $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають зображення $F_1(p)$ і $F_2(p)$, відповідно: $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$ і $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$. Тоді згортка (3.44) має своїм зображенням добуток відповідних зображень $F_1(p) \cdot F_2(p)$:

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p).$$

***Приклад* 3.20.** Знайти згортку двох оригіналів $f_1(t) = t^2$ і $f_2(t) = e^{2t}$ та її зображення.

Розв'язання.

Знайти згортку двох оригіналів $f_1(t) = t^2$ і $f_2(t) = e^{2t}$ та її зображення.

Скористаємося означенням згортки (3.44):

$$t^2 * e^{2t} = \int_0^t (t-\tau)^2 e^{2\tau} d\tau =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \text{ (формула інтегрування частинами)} \\ u = (t-\tau)^2 \Rightarrow du = -2(t-\tau) d\tau \\ dv = e^{2\tau} d\tau \Rightarrow v = \int e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2\tau} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{(t-\tau)^2}{2} e^{2\tau} \Bigg|_0^t - \frac{1}{2}(-2) \int_0^t (t-\tau) e^{2\tau} d\tau = \left\| \begin{array}{l} u = t - \tau \Rightarrow du = -d\tau \\ dv = e^{2\tau} d\tau \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2\tau} \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \frac{t-\tau}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t = -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4}\left(2t^2 + 2t + 1\right).$$

За теоремою 3.10 знайдемо зображення для згортки $t^2 * e^{2t}$:

$$t^2 \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- \frac{2!}{p^3}; \; e^{2t} \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- \frac{1}{p-2} \Rightarrow t^2 * e^{2t} \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- \frac{2}{p^3 (p-2)}.$$

***Приклад* 3.21.** Знайти зображення оригінала

$$\varphi(t) = \int_0^t \cos(t-\tau) \cdot e^{2\tau} d\tau .$$

Розв'язання.

Оригінал, з означення (3.44), є згорткою двох оригіналів $f_1(t) = \cos t$ і $f_2(t) = e^{2t}$.

Оскільки

$$f_1(t)=\cos t \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p}{p^2+1}\;;\;\; f_2(t)=e^{2t} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{1}{p-2}\,,$$

то за теоремою 3.10 (теорема множення), маємо:

$$\cos t * e^{2t} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-2}\,.$$

Остаточно отримаємо:

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\cdot e^{2\tau}d\tau = \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p}{(p^2+1)(p-1)}\,.$$

§4. Знаходження оригінала за даним зображенням

Розглянемо задачу, обернену до попередніх: знайти оригінал за існуючим зображенням.

В загальному випадку можна скласти таблицю зображень багатьох функцій і за нею визначати оригінал для даного зображення. В теорії інтегральних перетворень існує формула оберненого перетворення, яка за даним зображенням дозволяє знаходити оригінал:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp\,. \tag{4.1}$$

Однак, в більшості випадків, означення оригінала за даним зображенням можна провести значно простіше. Це пов'язано з тим, що більшість зображень мають вигляд раціональних дробів. Тому обернене перетворення може бути зведено до наступних теорем.

Теорема 4.1 (1-а теорема розкладання). Якщо зображення $F(p)$ може бути подано у вигляді суми $F(p)=\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{p^{n+1}}$, де a_n $\left(n=\overline{0,k}\right)$ – деякі сталі, то відповідний цьому зображенню оригінал має вигляд:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n\,. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1 (2-а теорема розкладання). Якщо зображення є правильним раціональним дробом: $F(p)=\dfrac{R(p)}{Q(p)}$, то, розкладаючи її на найпростіші дроби, отримаємо суму зображень для найпростіших оригіналів.

***Приклад* 4.1.** Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{4p+5}{(p-2)\left(p^2+4p+5\right)}\,.$$

Розв'язання.

Розкладемо початкову функцію $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\frac{4p+5}{(p-2)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{A\left(p^2+4p+5\right)+(Bp+C)(p-2)}{(p-2)\left(p^2+4p+5\right)},$$

$$4p+5=A\left(p^2+4p+5\right)+(Bp+C)(p-2),$$

$$p=2\Rightarrow 8+5=A(4+8+5)\Rightarrow 17A=13\Rightarrow A=\frac{13}{17}.$$

$$\begin{array}{l|l} p^2 & A+B=0, \\ p^0 & 5A-2C=5. \end{array}$$

$$B=-A\Rightarrow B=-\frac{13}{17},$$

$$C=\frac{5A-5}{2}\Rightarrow C=\frac{5}{2}\left(\frac{13}{17}-1\right)=\frac{5}{2}\left(-\frac{4}{17}\right)=-\frac{10}{17}.$$

Знаходячи коефіцієнти A, B і C, отримаємо:

$$F(p)=\frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{17}\cdot\frac{13p+10}{p^2+4p+5}.$$

Для дробу $\dfrac{1}{p-2}$ маємо оригінал e^{2t}:

$$\frac{1}{p-2}\xrightarrow{\cdot\,\cdot}e^{2t}.$$

Перетворимо другий дріб:

$$\frac{13p+10}{p^2+4p+5}=\frac{13(p+2-2)+10}{(p+2)^2+1}=\frac{13(p+2)-13\cdot 2+10}{(p+2)^2+1}=$$

$$=\frac{13(p+2)-16}{(p+2)^2+1}=13\frac{(p+2)}{(p+2)^2+1}-16\frac{1}{(p+2)^2+1}.$$

Оскільки

$$\frac{p}{p^2+1} \xrightarrow{\cdot\,\cdot} \cos t \; ; \; \frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\cdot\,\cdot} \sin t \; ,$$

то за теоремою зсунення (3.24) маємо:

$$\frac{p+2}{(p+2)^2+1} \xrightarrow{\cdot\,\cdot} e^{-2t}\cos t \; ; \; \frac{1}{(p+2)^2+1} \xrightarrow{\cdot\,\cdot} e^{-2t}\sin t \; .$$

Використовуючи властивість лінійності, знайдемо оригінали для кожного з доданків:

$$\frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+\frac{16}{17}\frac{1}{(p+2)^2+1} \xrightarrow{\cdot\,\cdot} \frac{13}{17}e^{2t}-$$

$$-\frac{13}{17}e^{-2t}\cos t+\frac{16}{17}e^{-2t}\sin t \; .$$

Таким чином, оригіналом даного зображення є функція:

$$f(t)=\frac{13}{17}e^{2t}-\frac{13}{17}e^{-2t}\cos t-\frac{16}{17}e^{-2t}\sin t \; .$$

***Приклад* 4.2.** Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2} \; .$$

Розв'язання.

У даному випадку подамо $F(p)$ у вигляді добутку двох простих дробів:

$$\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} \; .$$

Скористаємося теоремою про згортку. Оскільки

$$\frac{1}{p^2+1} \xleftarrow{\cdot\,\cdot} \sin t \; ; \; \frac{p}{p^2+1} \xleftarrow{\cdot\,\cdot} \cos t \; ,$$

то за формулою (3.46)

$$\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} \leftarrow\!\!\!\div \sin t * \cos t\,.$$

Знайдемо згортку $\sin t * \cos t$. З означення (3.44) маємо:

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin\tau\cdot\cos\left(t-\tau\right)d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin\left(\tau+t-\tau\right)+\sin\left(\tau-\left(t-\tau\right)\right)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t\left[\sin t+\sin\left(2\tau-t\right)\right]d\tau = \frac{\sin t}{2}\int_0^t d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t \sin\left(2\tau-t\right)d\tau =$$

$$= \left\|\begin{matrix}\left(2\tau-t\right)'=2\\ d\left(2\tau-t\right)=2d\tau\\ d\tau=\frac{1}{2}d\left(2\tau-t\right)\end{matrix}\right\| = \frac{\sin t}{2}\tau\Big|_0^t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^t \sin\left(2\tau-t\right)d\left(2\tau-t\right) =$$

$$= \frac{t\cdot\sin t}{2}-\frac{1}{4}\cos\left(2\tau-t\right)\Big|_0^t = \frac{t\cdot\sin t}{2}-\frac{1}{4}\left(\cos t-\cos\left(-t\right)\right) =$$

$$= \frac{t\cdot\cos t}{2}-\frac{1}{4}\left(\cos t-\cos t\right) = \frac{t\cdot\cos t}{2}\,.$$

Остаточно отримаємо:

$$\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2} \leftarrow\!\!\!\div \frac{t\cdot\cos t}{2}\,.$$

§5. Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Операційне числення використовують при розв'язанні цілої низки практичних задач, однак найбільше застосування воно отримало при розв'язанні диференціальних рівнянь. Щоб зрозуміти суть цього методу, розглянемо найпростіший випадок – лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Отже, нехай є рівняння:

$$a_0 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_2 \cdot y(t) = f(t). \qquad (5.1)$$

де a_0, a_1, a_2 – сталі величини.

Нехай потрібно знайти частинний розв'язок рівняння (5.1), яке задовольняє початкові умови:

$$y(0) = y_0;\; y'(0) = y'_0. \qquad (5.2)$$

Будемо вважати, що шуканий розв'язок $y(t)$, його похідна і права частина рівняння (5.1) $f(t)$ є оригіналами.

Введемо позначення для зображень:

$$y(t) \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- Y(p),\; f(t) \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- F(p). \qquad (5.3)$$

За теоремою про диференціювання оригінала (3.8) – (3.9) маємо:

$$y'(t) \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - y_0, \qquad (5.4)$$

$$y''(t) \leftarrow\!\!\!\!\div\!\!\!- p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y_0 - y'_0. \qquad (5.5)$$

Оскільки ліва і права частини диференціального рівняння (5.1) є рівними між собою, то, за теоремою про єдиність зображення, їхні зображення також повинні бути рівними одне одному:

$$a_0\left(p^2\cdot Y(p)-p\cdot y_0-y_0'\right)+a_1\left(p\cdot Y(p)-y_0\right)+a_2Y(p)=F(p)$$

або

$$Y(p)\left(a_0p^2+a_1p+a_2\right)-a_0py_0-a_0y_0'-a_1y_0=F(p),$$

$$Y(p)\left(a_0p^2+a_1p+a_2\right)=F(p)+a_0py_0+a_0y_0'+a_1y_0. \qquad (5.6)$$

Рівняння (5.6) називається допоміжним рівнянням або рівнянням у зображеннях. Таким чином, замість диференціального рівняння (5.1) для оригінала $y(t)$ отримано алгебраїчне рівняння для його зображення (5.6). Початкові умови при цьому враховуються автоматично.

Виразивши з (5.6) $Y(p)$, отримаємо розв'язок рівняння в зображеннях:

$$Y(p)=\frac{F(p)+a_0py_0+a_0y_0'+a_1y_0}{a_0p^2+a_1p+a_2}. \qquad (5.7)$$

Це так званий операційний розв'язок рівняння. Відновлюючи за зображенням $Y(p)$ його оригінал, можна отримати вираз для $y(t)$.

Даний метод є особливо зручним, коли лінійне диференціальне рівняння можна розв'язати лише методом варіації Лагранжа, а інтеграли при цьому виходять достатньо складними, або, коли праву частину $f(t)$ зображено у вигляді графіка або функціонального ряду.

***Приклад* 5.1.** Операційним методом розв'язати задачу Коші.

$$y''-y=4\sin t+5\cos 2t, \qquad (5.8)$$

$$y(0)=-1;\ y'(0)=-2. \qquad (5.9)$$

Розв'язання.

Знайдемо допоміжне рівняння для рівняння (5.8), враховуючи початкові умови (5.9):

$$y(t)\leftarrow\!\!\div\!\!-Y(p),$$

$$y'(t)\leftarrow\!\!\div\!\!-pY(p)-y(0)=pY(p)+1,$$

$$y''(t)\leftarrow\!\!\div\!\!-p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+p+2;$$

$$\sin t \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{1}{p^2+1}\ ;\ \cos 2t \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p}{p^2+4}\,.$$

Тоді рівняння в зображеннях має вигляд:

$$p^2 Y(p) + p + 2 - Y(p) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4}\,. \tag{5.10}$$

Виразимо $Y(p)$ з рівняння (5.10):

$$Y(p)\left(p^2-1\right) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4} - p - 2\,. \tag{5.11}$$

Перетворимо праву частину виразу (5.11):

$$\frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4} - p - 2 =$$

$$= \frac{4\left(p^2+4\right) + 5p\left(p^2+1\right) - (p+2)\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} =$$

$$= \frac{4p^2+16+5p^3+5p-(p+2)\left(p^4+5p^2+4\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} =$$

$$= \frac{5p^3+4p^2+5p+16-p^5-5p^3-4p-2p^4-10p^2-8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} =$$

$$= \frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}\,.$$

Отже,

$$\left(p^2-1\right)\cdot Y(p) = \frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}\,,$$

$$Y(p) = \frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}\,. \tag{5.12}$$

Розкладемо дріб (5.12) на найпростіші дроби:

$$\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}=\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p-1)(p+1)}=$$

$$=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}+\frac{E}{p-1}+\frac{F}{p+1}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D, E і F:

$$\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}+\frac{E}{p-1}+\frac{F}{p+1}=$$

$$=\frac{(Ap+B)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)+E\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p+1)+F\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p-1)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)},$$

$$(Ap+B)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)+$$

$$+E\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p+1)+F\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p-1)=$$

$$=-p^5-2p^4-6p^2+p+8.$$

$$p=1\Rightarrow E\cdot2\cdot5\cdot2=-1-2-6+1+8\Rightarrow 20E=0\Rightarrow E=0,$$

$$p=-1\Rightarrow F\cdot2\cdot5\cdot(-2)=1-2-6-1+8\Rightarrow -20F=0\Rightarrow F=0.$$

Оскільки $p^2+1=0$ при $p=\pm i$, а $p^2+4=0$, при $p=\pm 2i$, застосуємо ту ж методику для знаходження решти коефіцієнтів:

$p=i$:

$$(Ai+B)\left(i^2+4\right)\left(i^2-1\right)=-i^5-2i^4-6i^2+i+8.$$

Оскільки $i^2=-1$; $i^4=1$; $i^5=i$, то

$$(Ai+B)(-1+4)(-1-1)=-i-2+6+i+8,$$

$$-6(Ai+B)=12,$$

$$Ai+B=\frac{12}{-6},$$

$$Ai+B=-2\Rightarrow\ A=0;\ B=-2.$$

$p = 2i$:

$$(C \cdot 2i + D)\left((2i)^2 + 1\right)\left((2i)^2 - 1\right) = -(2i)^5 - 2\cdot(2i)^4 - 6\cdot(2i)^2 + 2i + 8,$$

$$(2Ci + D)(-4+1)(-4-1) = -32i - 32 + 24 + 2i + 8,$$

$$(2Ci + D)\cdot 15 = -30i,$$

$$2Ci + D = -\frac{30}{15}i,$$

$$2Ci + D = -2i \Rightarrow D = 0,\ 2C = -2 \Rightarrow C = -1.$$

Отримаємо вираз для $Y(p)$:

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p^2+1} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} \sin t;\ \frac{p}{p^2+4} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} \cos 2t,$$

то, з лінійності перетворення Лапласа, з виразу (5.13) отримаємо оригінал наступного вигляду:

$$y(t) = -2\sin t - \cos 2t.$$

$p = 2i$:

$$(C \cdot 2i + D)\left((2i)^2 + 1\right)\left((2i)^2 - 1\right) = -(2i)^5 - 2\cdot(2i)^4 - 6\cdot(2i)^2 + 2i + 8,$$

$$(2Ci + D)(-4+1)(-4-1) = -32i - 32 + 24 + 2i + 8,$$

$$(2Ci + D)\cdot 15 = -30i,$$

$$2Ci + D = -\frac{30}{15}i,$$

$$2Ci + D = -2i \Rightarrow D = 0,\ 2C = -2 \Rightarrow C = -1.$$

Отримаємо вираз для $Y(p)$:

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4} .$$

Оскільки

$$\frac{1}{p^2+1} \leftarrow\!\!\!\div \sin t \ ; \ \frac{p}{p^2+4} \leftarrow\!\!\!\div \cos 2t \ ,$$

то, з лінійності перетворення Лапласа, з виразу (5.13) отримаємо оригінал наступного вигляду:

$$y(t) = -2\sin t - \cos 2t \ .$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

4. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. I. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1971. – 600 с.

5. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. II. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 1. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

9. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.

10. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Функции нескольких переменных / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.

11. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1994. – 496 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990. – 270 с.

13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 352 с.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 3. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 288 с.

15. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. І. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с.

16. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. ІІ. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с.

17. Заболоцький М. В. Математичний аналіз / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.

18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 608 с.

19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1988. – 800 с.

20. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 653 с.

Навчальне видання

Любчик Леонід Михайлович, **Ахієзер** Олена Борисівна,
Геляровська Оксана Анатоліївна, **Дунаєвська** Ольга Ігорівна,
Галуза Олексій Анатолійович, **Сердюк** Ірина Василівна

Вища математика.
Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання.
Теорія функцій комплексної змінної. Операційне численя

Навчальний посібник
для студентів усіх спеціальностей
вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Любчик** Леонід Михайлович

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Єфремова

План 2016 р., поз. 34

Підп.до друку 03.02.2016 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 8,6
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.